

量子情報入門

講師：中田 亮史
タカタ ヨシフミ

京都大学基礎物理学研究所 特定准教授

研究テーマ：量子ランダムネスの基礎理論と応用

↳ 特に、量子誤り訂正や量子多体系への応用

1. 量子力学の公理の復習
2. 量子論の拡張公理
3. 量子情報の基礎

参考書 : Nielsen & Chuang : good 本"古"い。

Mark Wilde, "Q. info. theory" : 若桑さんの講義。

John Watrous, "The theory of Q. info." : 良書本"
読みがら"い。

石坂他, 「量子情報科学入門」 : 本取り早く学ぶ良書

中田芳典, 「量子情報理論」 : 朝倉書店より今年中には
出版予定。

1. 量子力学 (Quantum Mechanics) の復習

1-1. Q.M. の五公理

1. 物理系に伴随するヒルベルト空間 \mathcal{H} が存在し、その系の状態は \mathcal{H} の単位ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ で与えられる。

2. 時間発展は $U = e^{-iHt}$ で与えられる。

3. 量子測定はヒルベルト空間の基底で与えられる。

4. 複数の粒子から構成された量子系は、テンソル積で記述される。

5. 因果律

← この公理に含めずには流儀による。

1. 物理系に伴随するヒルベルト空間 \mathcal{H} が存在し、
この系の状態は \mathcal{H} の単位ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ で与えられる。

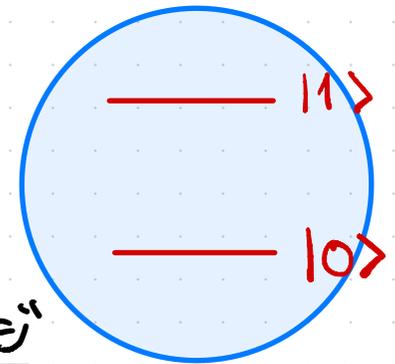
eg)

✓ spin-1/2 \Leftrightarrow 2次元ヒルベルト空間 \mathbb{C}^2
 \hookrightarrow 基底 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ $\text{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$\swarrow \nearrow$ 対偶ベクトル, $\langle 0| := (|0\rangle)^\dagger$ 対偶ベクトル.

量子状態: $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$)

\hookrightarrow 任意の2次元系を qubit と呼ぶ!



Qubit のイメージ

✓ 波動関数 $\psi(x,t) \in L^2$: ∞ 次元ヒルベルト空間.

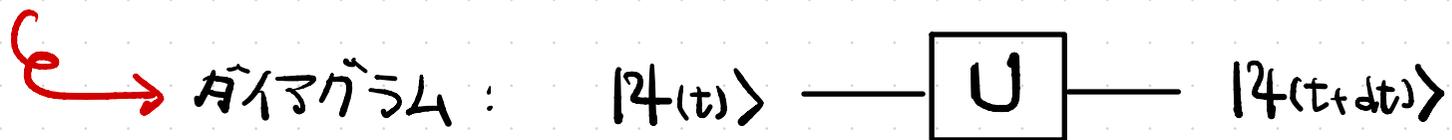
\hookrightarrow 本講義では取り扱わない.

2. 時間発展は $U = A(t) U^{-1}$ と与えられる。

時刻 t

$t+dt$

$$|\psi(t)\rangle \xrightarrow{U=A(t)} |\psi(t+dt)\rangle = U(t, t+dt) |\psi(t)\rangle$$



例) 1 qubit: 2×2 の $U = A(t)$ 行列。

← 基底は $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

✓ Pauli ops $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

✓ Hadamard op. $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$|0\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) =: |+\rangle$$

$$|1\rangle \xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) =: |-\rangle$$

← Pauli X の固有状態。

3. 測定は基底 $\{|e_j\rangle\}_{j=0}^{d-1}$ と \bar{c} と \bar{c}^\dagger である。

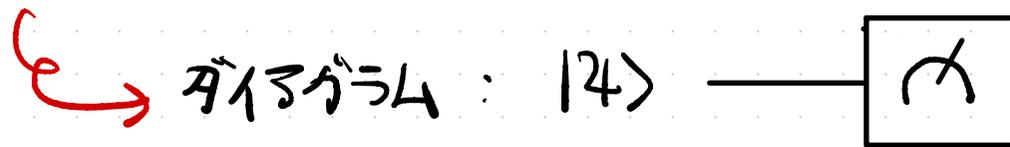
状態

$|z\rangle$



確率 $|\langle e_j | z \rangle|^2$ の結果 j が出力、
状態は $|e_j\rangle$ に変化させる。

例) $|z\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ を測定する。



✓ $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ の測定

- 0 prob. $|\langle 0 | z \rangle|^2 = |\alpha|^2$
- 1 prob. $|\langle 1 | z \rangle|^2 = |\beta|^2$

$(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$

✓ $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ の測定

- + prob. $|\langle + | z \rangle|^2 = \frac{|\alpha + \beta|^2}{2}$
- - prob. $|\langle - | z \rangle|^2 = \frac{|\alpha - \beta|^2}{2}$

$(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$

NOTE 量子状態が同じでも、基底の選んで異なる確率分布。

NOTE

1→の量子状態を測定すると、結果が1→出た後に 状態は破壊 される。

量子状態が1→しか存在しなければ、 ←つまり、
確率分布を知ることはできない。

↳ 量子状態を特定するためには、

同一の状態を多数準備して、異なる基底で測定を繰り返す。



(状態) のモグラフィ

後のため、確率 $|\langle e_j | \psi \rangle|^2$ を書き換えておく。

$$|\psi\rangle\langle\psi| := |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \psi_1\langle\psi| \\ \vdots \\ \psi_d\langle\psi| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 & \psi_1\bar{\psi}_2 & \dots & \psi_1\bar{\psi}_d \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \psi_d\bar{\psi}_1 & \dots & \dots & |\psi_d|^2 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \nearrow \text{列ベクトル} & \nearrow \text{行ベクトル} & \uparrow \langle\psi| = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_d) & \nearrow d \times d \text{ 行列} \end{matrix}$

この行列表記を用いると、

$$|\langle e_j | \psi \rangle|^2 = \text{Tr} [\underbrace{|e_j\rangle\langle e_j|}_{\text{行列の積}} |\psi\rangle\langle\psi|]$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{r.h.s.}) &= \text{Tr} [\underbrace{(|e_j\rangle\langle e_j|)}_{\text{行列の積}} (|\psi\rangle\langle\psi|)] \\ &= \text{Tr} [\langle e_j | \psi \rangle \langle \psi | e_j \rangle] \\ &= \langle e_j | \psi \rangle \langle \psi | e_j \rangle = (\langle e_j | \psi \rangle) \times (\overline{\langle e_j | \psi \rangle}) \end{aligned}$$

\uparrow Tr - Tr の巡回性
 $\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[CAB]$

4. 複合量子系 \Rightarrow テンソル積.

系A \mathcal{H}^A 系B \mathcal{H}^B \Rightarrow 1つの系とみなす = 系AB

$\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$

\hookrightarrow 基底 $\{ |e_j\rangle \}_{j=1}^{d_A}$ \hookrightarrow $\{ |f_\alpha\rangle \}_{\alpha=1}^{d_B}$

$\therefore \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$ とは、 $\{ |e_j\rangle^A \otimes |f_\alpha\rangle^B \}_{j=1, \dots, d_A, \alpha=1, \dots, d_B}$ の張る $d_A d_B$ 次元ヒルベルト空間.

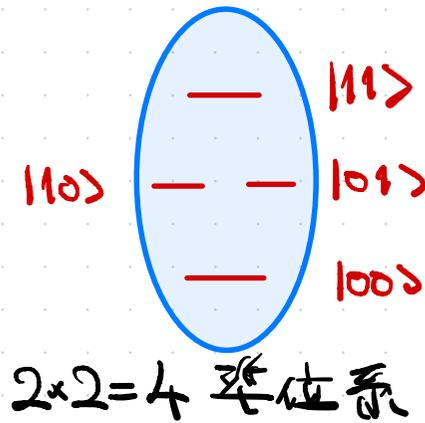
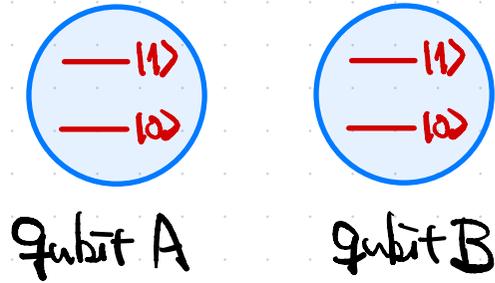
\hookrightarrow 一般に $|\psi\rangle^{AB} \in \mathcal{H}^{AB}$ は、 $|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_A} \sum_{\alpha=1}^{d_B} C_{j\alpha} |e_j\rangle^A \otimes |f_\alpha\rangle^B$

$\left[\begin{array}{l} \times \text{が} \text{し} \text{も} \quad |\psi\rangle^{AB} = |s\rangle^A \otimes |s\rangle^B \text{ とは書けない} \\ \text{積状態 (プロダクト状態)} \end{array} \right]$

"非プロダクト状態" = エンタングル状態

例) 2 qubits = span $\{ \underline{100}, 101, 110, 111 \}$

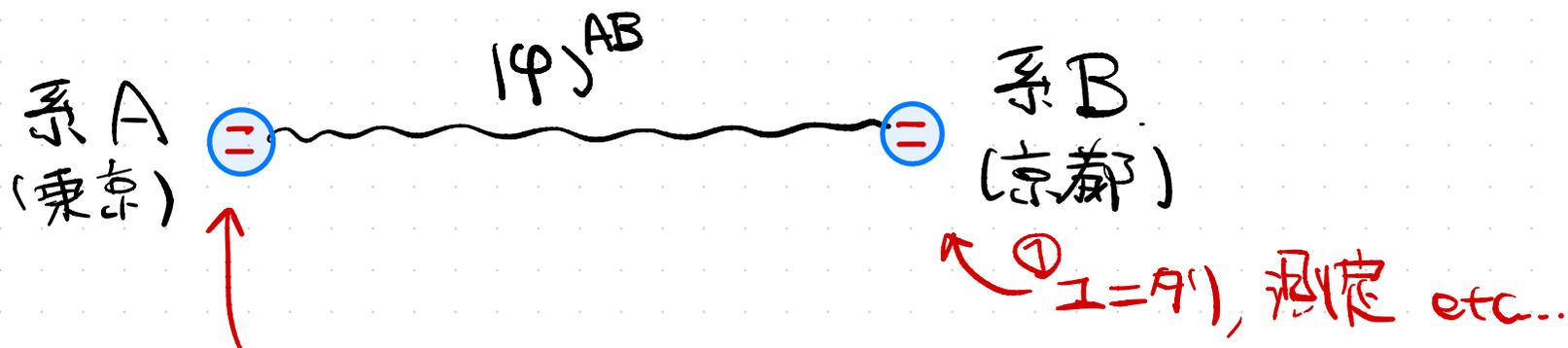
= $10 \otimes 10$



$\left\{ \begin{array}{l} \text{プロダクト状態の例} : 100, \dots, 111, 1++ , 10+, 1-, \dots \\ \text{エネルギー固有状態の例} : \frac{1}{\sqrt{2}} (100 + 111), \frac{1}{\sqrt{2}} (10+ + 11-), \text{etc.} \\ \frac{1}{2} (1+0 + \sqrt{2} 1-1 + 11-) \end{array} \right.$

5. 因果律

複合系 AB : B でのどのような操作を行っても、その操作の結果が A に伝わることはない。A の状態は定まらない。

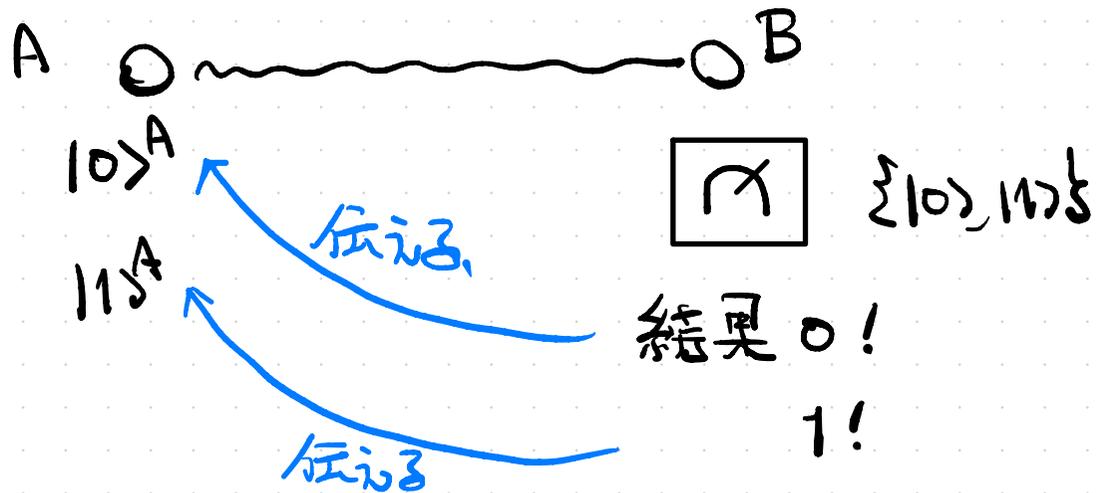


① による影響を受けない。

例) $| \psi \rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 00 \rangle^{AB} + | 11 \rangle^{AB})$ で B を $| 0 \rangle, | 1 \rangle$ と測定する。

測定結果 $\begin{cases} 0 \Rightarrow A \text{ の状態} \\ 1 \Rightarrow A \text{ の状態} \end{cases}$

ただし、BからAに測定結果が伝えられた場合はこの限りではない。



NOTE "何かが伝わり" = "状態"が変化するのは、量子特有ではない。

例)

Bで甘く口と振って、1を得る。

伝わり \rightarrow \textcircled{A} prob. $\frac{1}{6}$ だよ!!
 \downarrow 変化
伝わり \rightarrow \textcircled{A} prob. 1 だよ!!

Q.M.の五公理のまとめ

1. 量子状態は単位ベクトル $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.

2. 時間発展は $\psi = U(t) \psi_0$ で与えられる。

3. 量子測定はヒルベルト空間の基底で与えられる。

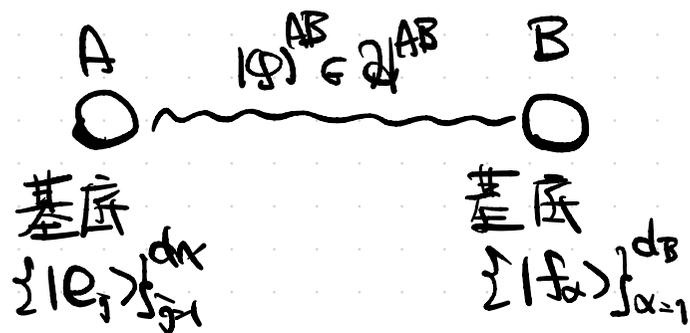
4. 複数の粒子から構成された量子系は、テンソル積で記述される。

5. 因果律

1-2. Q.M. からの Quantum Information へ

Q.M. の公理から、直ちに明示的ではない操作: **系の一部を捨てる。**

↳ 部分トレース の記述される。



$$|\varphi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_A} \sum_{\alpha=1}^{d_B} C_{j\alpha} |e_j\rangle^A \otimes |f_\alpha\rangle^B$$

← この B を "捨てる" = B の部分トレース Tr_B をとる。

部分トレース: $\text{Tr}_B [\rho^{AB}] = \sum_{\alpha=1}^{d_B} (I^A \otimes \langle f_\alpha |^B) \rho^{AB} (I^A \otimes |f_\alpha\rangle^B)$

↖ \mathcal{Q}^{AB} 上の行列

==>

$$I^A \otimes |f_\alpha\rangle^B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}^A \otimes |f_\alpha\rangle^B = \begin{pmatrix} |f_\alpha\rangle^B & & & \\ & |f_\alpha\rangle^B & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |f_\alpha\rangle^B \end{pmatrix}$$

} $d_A \times d_B$: 長 d_B 行 d_A 列

実際 = ψ, χ である。 $\Theta^{AB} = |\psi \times \varphi\rangle^{AB}$

$$= \sum_{j,\alpha} \sum_{j',\alpha'} C_{j\alpha} \overline{C_{j'\alpha'}} (|e_j\rangle^A \otimes |f_{\alpha}\rangle^B) (\langle e_{j'}|^A \otimes \langle f_{\alpha'}|^B)$$

$$\overline{\mathbb{T}}_B [|\psi \times \varphi\rangle^{AB}]$$

$$= \sum_{\beta=1}^{d_B} (\mathbb{I}^A \otimes \langle f_{\beta}|^B) \left(\sum_{j,\alpha} \sum_{j',\alpha'} C_{j\alpha} \overline{C_{j'\alpha'}} (|e_j\rangle^A \otimes |f_{\alpha}\rangle^B) (\langle e_{j'}|^A \otimes \langle f_{\alpha'}|^B) \right) (\mathbb{I}^A \otimes |f_{\beta}\rangle^B)$$

$$= \sum_{j,j'=1}^{d_A} \left(\sum_{\alpha=1}^{d_B} C_{j\alpha} \overline{C_{j'\alpha}} \right) |e_j \times e_{j'}\rangle^A = \sum_{j,j'=1}^{d_A} C_{jj'} |e_j \times e_{j'}\rangle^A$$

$$\therefore C_{jj'}$$

d^A 上の行列.

↑ 一般にはベクトル $|i\rangle$ を用いて

$i \times i$ と書けない。

量子系の一部を捨てる = まご合の子と。

ベクトルでは記述できない量子状態も存在する。

*特に、 \mathbb{Q} 上の \mathbb{Q} は部分系に着目して解析する手がかりがあるため、
 \mathbb{Q} の公理を拡張しておくことが便利。

2. 量子論の拡張公理

2-1. 量子状態の拡張

拡張公理1.

量子状態 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 密度行列 ρ ($\rho \geq 0, \text{Tr}[\rho] = 1$)

Remark

1. $\rho \geq 0 \iff$ 全ての固有値 ≥ 0 or $\forall |\varphi\rangle, \langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0$.

2. ベクトルで与えられる状態 $|\varphi\rangle$ の密度行列は、 $|\varphi\rangle\langle\varphi|$.

純粋状態 (pure state).

混合状態 (mixed state)

\swarrow
 \searrow

3. $t=0$ 時間発展: $\rho \xrightarrow{U} U \rho U^\dagger$

$\{|e_j\rangle\}_j$ で測定: 確率 $\text{Tr}[|e_j\rangle\langle e_j| \rho] = \langle e_j | \rho | e_j \rangle$ が出てくる.

4. 量子状態 ρ が pure or mixed? \Rightarrow $\text{rank} \rho$ によって決まる。
non-zero の固有値の個数

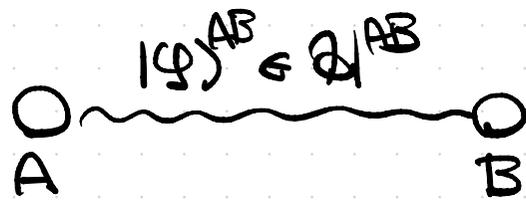
$$\rho = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j| \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \geq 0 \Leftrightarrow \forall_j, \lambda_j \geq 0 \\ \text{Tr}[\rho] = 1 \Leftrightarrow \sum_j \lambda_j = 1 \end{cases}$$

対角化 $\hookrightarrow \{\lambda_j\}_j$ は確率分布.

\hookrightarrow pure なら $\rho = 1 \times |e_i\rangle\langle e_i| + 0 \times$ 他の固有状態,
 $\hookrightarrow \text{rank} \rho = 1$.

$$\begin{cases} \rho \text{ pure} \Leftrightarrow \text{rank } \rho = 1 \\ \rho \text{ mixed} \Leftrightarrow \text{rank } \rho > 1 \end{cases}$$

5. 混合状態とエンタングル状態.



$$|\psi\rangle^{AB} = |\xi\rangle^A \otimes |\zeta\rangle^B : \text{プロダクト状態}$$

$$\neq \text{ " " " " } : \text{エンタングル状態.}$$

$$\rho^A := \frac{1}{\mathcal{N}} [|\psi\rangle\langle\psi|^{AB}] : B \text{を"捨てる"状態.}$$

↑ $|\psi\rangle^{AB}$ の 縮約密度行列 (reduced density matrix + marginal state)

$$|\psi\rangle^{AB} : \text{プロダクト状態} \iff \rho^A : \text{純粋状態} \quad (\rho^B \text{も})$$

$$|\psi\rangle^{AB} : \text{エンタングル状態} \iff \rho^A : \text{混合状態} \quad (\rho^B \text{も})$$

② 混合状態の起源は、エンタングルメント (と見子=こもこ子!)

2-2. 密度行列と状態のサンプリング

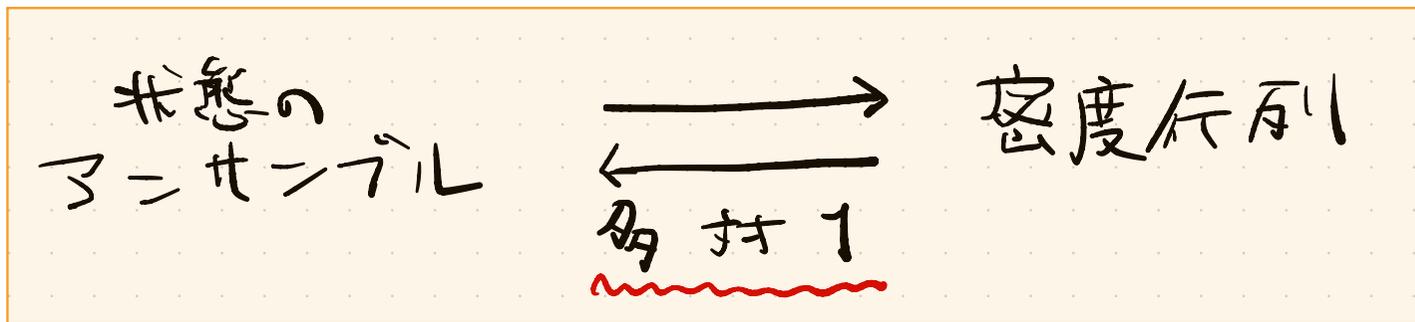
$\{p_j, |\varphi_j\rangle\}_{j=1}^J =$ 「確率 p_j で状態 $|\varphi_j\rangle$ と準備する」

状態のサンプリング

↑ 状態のサンプリングは、密度行列 $\rho = \sum_{j=1}^J p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j|$ で記述できる。

と表現することもありますが、これは注意が必要。

⇓ なぜなら、



eg. 1 qubit

$$\rho = \frac{I}{2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|), \quad \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|) \\ \frac{1}{3} (|\varphi_1\rangle\langle \varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle \varphi_2| + |\varphi_3\rangle\langle \varphi_3|) \text{ etc...} \end{array} \right.$$

完全混合
状態

- 例
- ~~確率~~ $\frac{1}{2}$ 確率 $\frac{1}{2}$ $|0\rangle$ or $|1\rangle$
 - " " $|+\rangle$ or $|-\rangle$
 - " $\frac{1}{3}$ 確率 $|\varphi_1\rangle$ or $|\varphi_2\rangle$ or $|\varphi_3\rangle$ etc...

など、様々な基底 \Rightarrow $\rho = \frac{I}{2}$ に対応している。

定理：同じ密度行列を持つ2つの量子状態を
見分ける物理操作は存在しない。



$$\sum_j p_j |\langle j | \alpha \rangle|^2 = \sum_\alpha p_\alpha |\langle \alpha | j \rangle|^2$$

識別不可。

つまり、量子状態表記は物理として“冗長”であり、密度行列がより fundamental な表現方法。

定理を示すための準備. 純粋化 (purification)

エネルギー共持した
純粋状態

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j,j'} C_{jj'} |e_j\rangle^A |e_{j'}\rangle^B$$

部分トレース \rightarrow

部分系の
混合状態

$$\rho^A = \sum_{j,j'} C_{jj'} |e_j\rangle \langle e_{j'}|^A$$

\leftarrow 純粋化.

例) $\rho^A = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle \langle e_j|^A$ の純粋化

① $|\psi_1\rangle^{AA'} = \sum_j \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle^A |e_j\rangle^{A'}$ とすると $\text{Tr}_{A'} [|\psi_1\rangle \langle \psi_1 |^{AA'}] = \rho^A$

\swarrow ρ^A の純粋化.

② $|\psi_2\rangle^{AA'} = \sum_j \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle^A |f_j\rangle^{A'}$ も ρ^A の純粋化.

\swarrow ρ^A の純粋化. \leftarrow 異なる基底

純粋化の自由度,

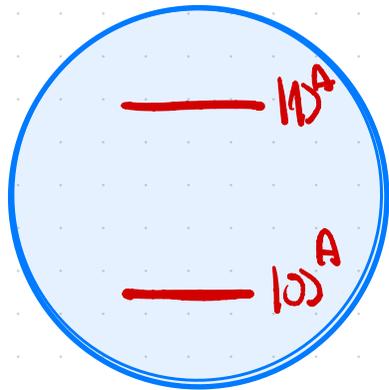
$|\rho_1\rangle^{AB} \succeq |\rho_2\rangle^{AC}$ を ρ^A の純粋化とし、 $\dim \mathcal{H}^B \leq \dim \mathcal{H}^C$ とすると、

$$|\rho_2\rangle^{AC} = (I^A \otimes V^{B \rightarrow C}) |\rho_1\rangle^{AB}$$

を満たす $B \neq C$ のアイソメトリ $V^{B \rightarrow C}$ が存在する。

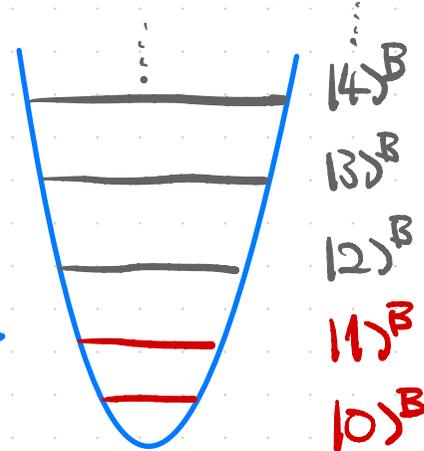
アイソメトリ (isometry, 等長写像, 埋め込み) とは

例) 二進位系 A
($d_A = 2$)



埋め込み
アイソメトリ

調和振動子 B
($d_B = \infty$)



} 二進法に便す,

$$V^{A \rightarrow B} = |0\rangle^B \langle 0|^A + |1\rangle^B \langle 1|^A$$

3次元空間の定義

$V^{A \rightarrow B}$: $d_B \times d_A$ 行列で、 $(V^{A \rightarrow B})^\dagger V^{A \rightarrow B} = I^A$ を満たすもの。

$\left. \begin{array}{l} \bullet d_A = d_B \text{ の場合は、 } \mathbb{I} = \mathbb{1} \\ \bullet d_A > d_B \text{ の } \text{''} \text{、存在しない} \end{array} \right\} \Rightarrow d_A \leq d_B \text{ は暗黙の了解}$

具体的には、
$$V^{A \rightarrow B} = \sum_{j=1}^{d_A} |f_j\rangle^B \otimes \langle e_j|^A$$

\uparrow Aの基底: d_A の行ベクトル
 \uparrow Bの基底: d_B の列ベクトル

$$= \left(\begin{array}{c} \text{た} \\ \text{こ} \\ \text{な} \\ \text{が} \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{た} \\ \text{こ} \\ \text{な} \\ \text{が} \end{array}} \right\} d_B$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{d_A}$

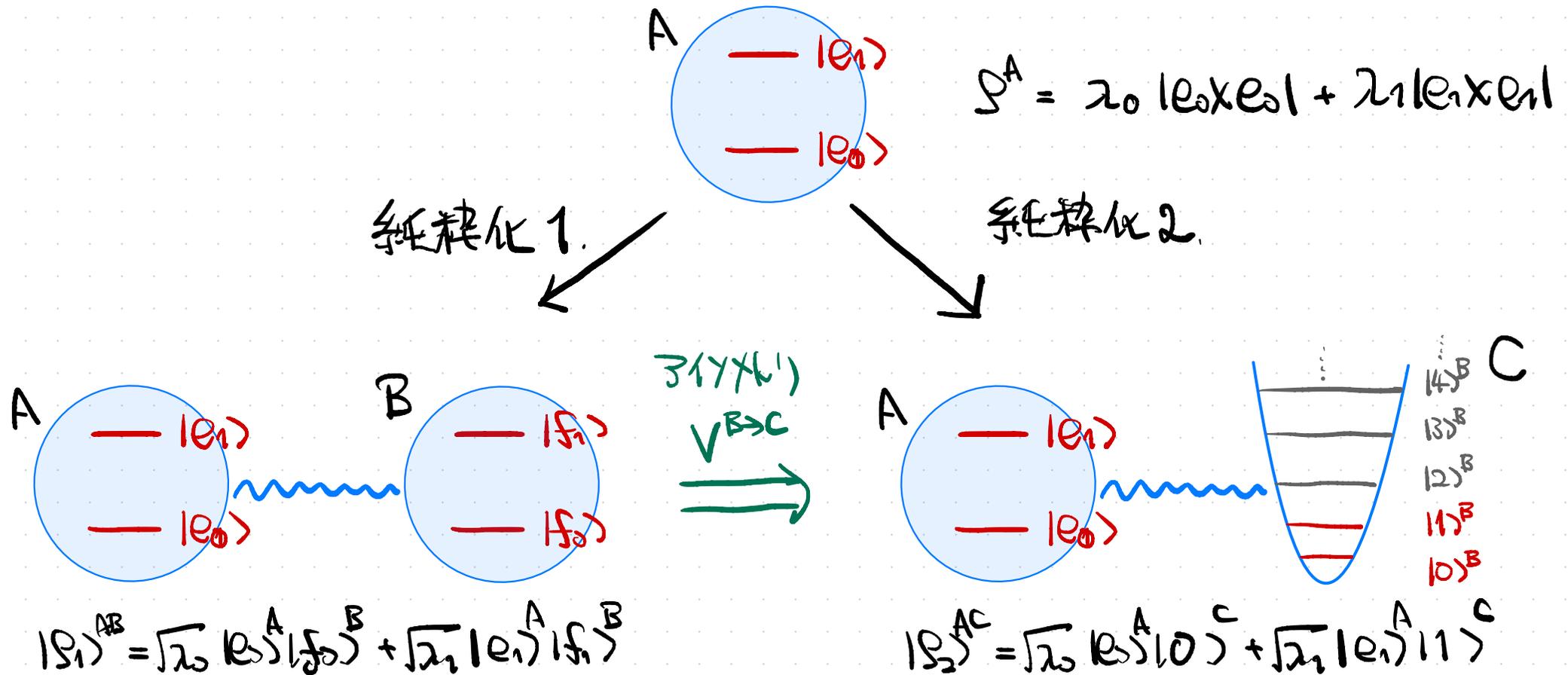
$$| \phi \rangle^A = \sum_{j=1}^{d_A} C_j | e_j \rangle^A \xrightarrow[\substack{\text{3次元空間} \\ V^{A \rightarrow B}}]{\hspace{1cm}} | \phi \rangle^B = \sum_{j=1}^{d_A} C_j | f_j \rangle^B$$

純粋化の自由度,

$|\rho_1\rangle^{AB} \geq |\rho_2\rangle^{AC}$ 是 \mathcal{S}^A の純粋化とし、 $\dim \mathcal{H}^B \leq \dim \mathcal{H}^C$ とすると、

$$|\rho_2\rangle^{AC} = (I^A \otimes V^{B \rightarrow C}) |\rho_1\rangle^{AB}$$

ある $B \rightarrow C$ のユニタリ $V^{B \rightarrow C}$ が存在する。



定理：同じ密度行列を持つ2つの3-システムを
見分ける物理操作は存在しない。

証明) 因果律の帰結。

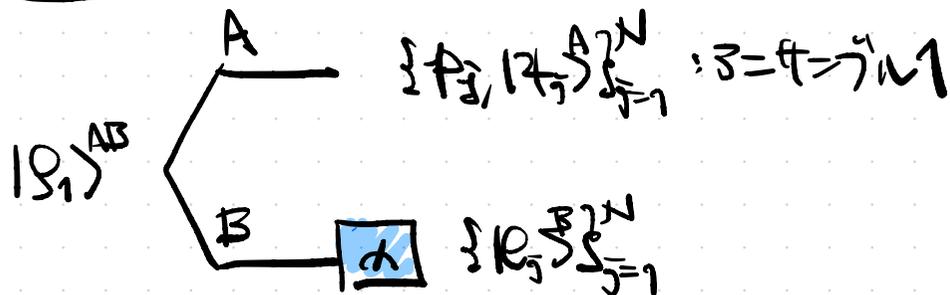
$$\begin{aligned} \text{システム1: } \{ \rho_j, |\varphi_j\rangle \}_{j=1}^N \\ \text{システム2: } \{ \rho_\alpha, |\varphi_\alpha\rangle \}_{\alpha=1}^M \end{aligned} \Rightarrow \rho^A = \sum_{j=1}^N \rho_j |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|^A = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha |\varphi_\alpha\rangle \langle \varphi_\alpha|^A$$

ρ^A の純粋化として、

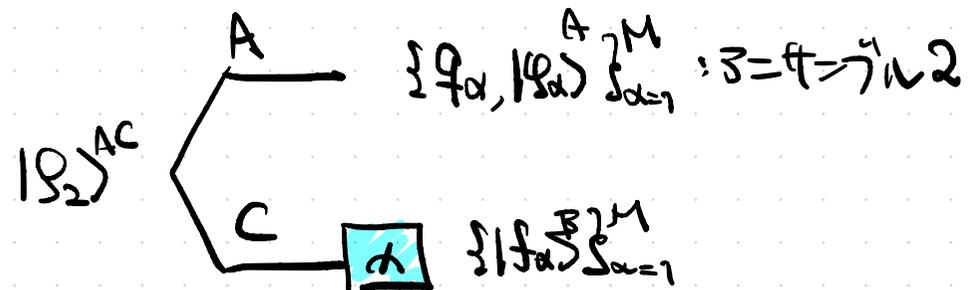
$$\left\{ \begin{aligned} |\rho_1\rangle^{AB} &= \sum_{j=1}^N \sqrt{\rho_j} |\varphi_j\rangle^A \otimes |\varphi_j\rangle^B \leftarrow B \text{ の基底} \\ |\rho_2\rangle^{AC} &= \sum_{\alpha=1}^M \sqrt{\rho_\alpha} |\varphi_\alpha\rangle^A \otimes |\varphi_\alpha\rangle^C \leftarrow C \text{ の基底} \end{aligned} \right.$$

ととく。

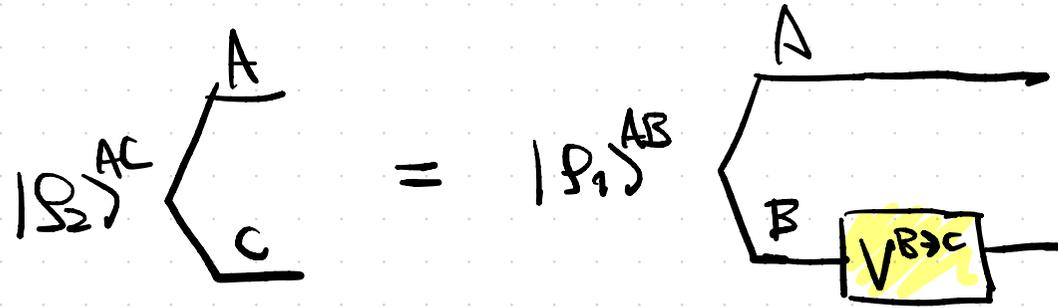
事実1



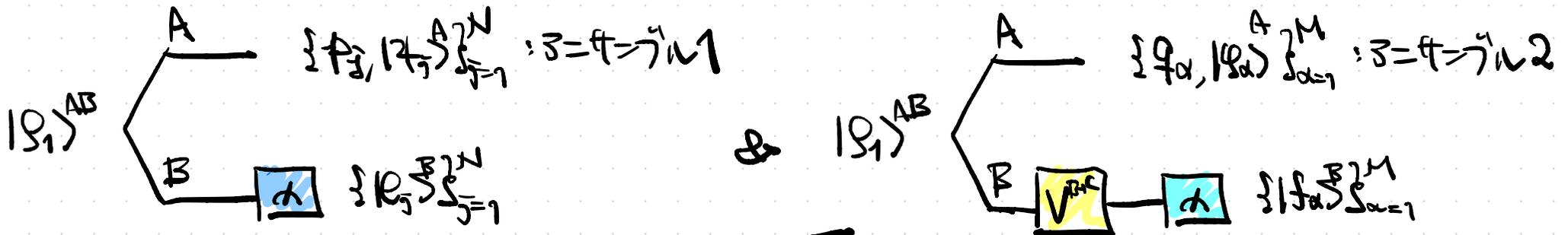
&



事実2 $N \leq M$ とすると、 $|S_2\rangle^{AC} = (I^A \otimes V^{B \rightarrow C}) |S_1\rangle^{AB}$ である。
 (3次元空間) $V^{B \rightarrow C}$ が存在する。



この2つの事実から、以下が従う。



状態 $|S_1\rangle^{AB}$ の B を操作するだけで、A は異なる 3-ゲートを実現可能。

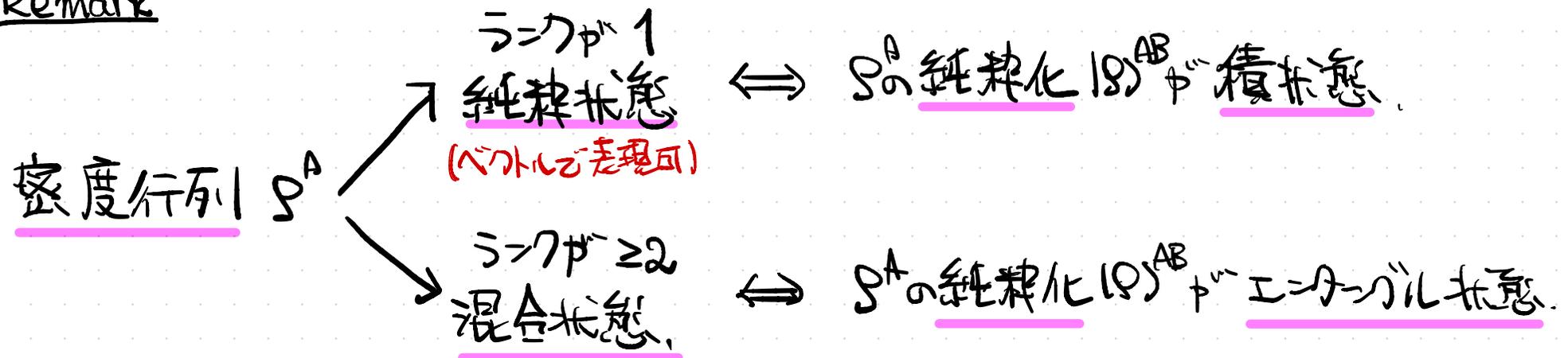
↳ 因果律より、A の物理は不変 \Leftrightarrow 3-ゲート1と2は物理的に見分けられない。

2-3. 量子状態の拡張公理 - まとめ -

拡張公理 1.

量子状態 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 密度行列 ρ ($\rho \geq 0, \text{Tr}[\rho] = 1$)

Remark



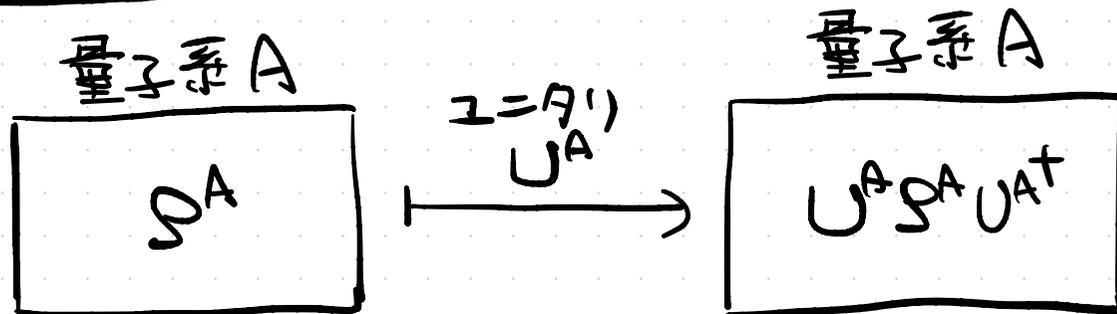
* ランク: non-zero 固有値の個数

* 純粋化は 3×3 の自由度を持つ.

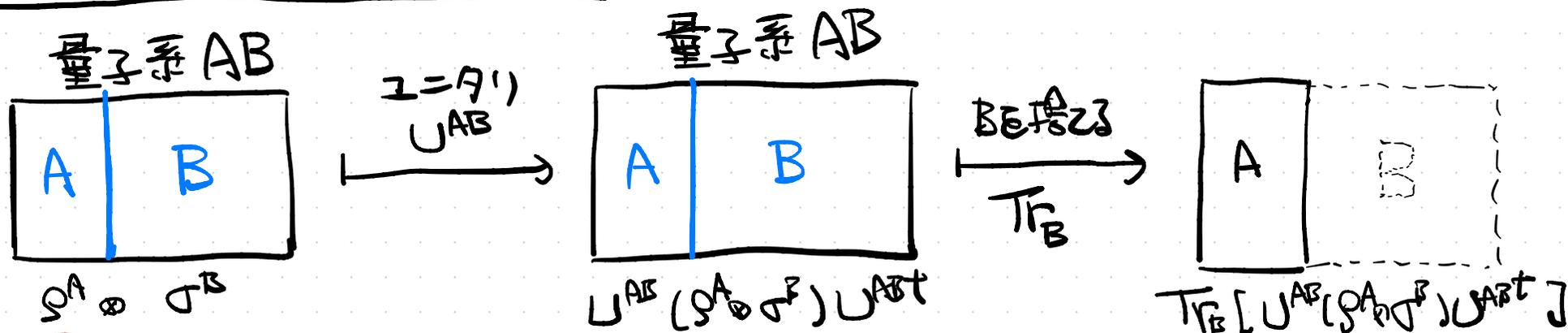
* 状態のエンタングルは、冗長な表現になっている.

2-4. 時間発展の拡張

従来公理



従来公理 + 部分系を捨てる



量子系 A の時間発展: 非ユニタリ

拡張公理2.

時間発展 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

全系のユニタリ + ^{Stinespring 拡張} 部分トレース

\iff 量子チャネル (CPTP 写像)

\iff Kraus 表現.

2-4-1. 量子チャンネル = CPTP 写像

Completely-Positive Trace-Preserving

$M(\mathcal{H}^A)$: ヒルベルト空間 \mathcal{H}^A 上の行列の集合.

CPTP 写像 $\mathcal{J}^{A \rightarrow B}$: $M(\mathcal{H}^A) \rightarrow M(\mathcal{H}^B)$ は以下をみたす.

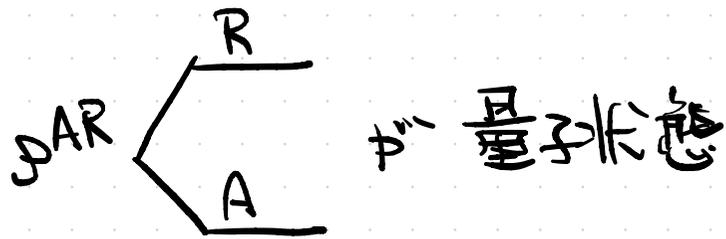
1. **C**ompletely-**P**ositive (CP性)

$$\text{任意の系 } R, \forall \rho^{AR} \geq 0 \Rightarrow (\mathcal{J}^{A \rightarrow B} \otimes \text{id}^R)(\rho^{AR}) \geq 0$$

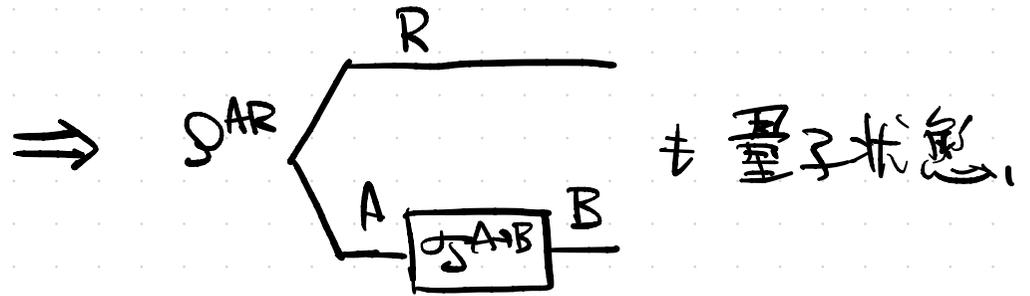
2. **T**race-**P**reserving (TP性)

$$\forall \rho^A, \text{Tr}_B[\mathcal{J}^{A \rightarrow B}(\rho^A)] = \text{Tr}_A[\rho^A],$$

⇒ 1と2より、



$$[\rho^{AR} \geq 0, \text{Tr}[\rho^{AR}] = 1]$$



$$\left[\begin{array}{l} 1より、(\rho^{A \rightarrow B} \otimes \text{id}^R)(\rho^{AR}) \geq 0 \\ 2より、\text{Tr}[\rho^{A \rightarrow B}(\rho^{AR})] = 1 \end{array} \right]$$

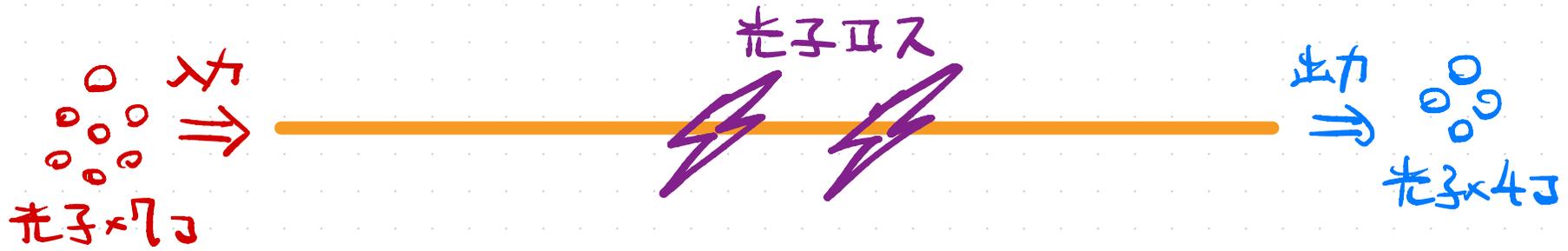
つまり、

CPTP写像 = (E=A=ガリに子おしかな...) 任意の量子状態を
 入力すると、必ず量子状態を出力する写像

例)

1. n 体時間発展: $\rho \rightarrow U \rho U^\dagger$
部分トレース: $\rho^{AB} \mapsto \rho^A = \text{Tr}_B[\rho^{AB}]$

2. 光ファイバー



⇒ CPTP 写像で記述される。(光子ロス: 4-フェーズ)

3. Pauli 4-フェーズ (Pauli 1-ビット)

1 qubit
O
 ρ

CPTP
→

1 qubit
O

$$p_0 \rho + p_1 X \rho X + p_2 Y \rho Y + p_3 Z \rho Z$$

⇒ (p_0, p_1, p_2, p_3) は確率分布.

Pauli 4-フェーズ

2-4-2. Kraus 表現

量子チャネル (CPTP 写像) $\mathcal{J}^{A \rightarrow B}$ は、Kraus 表現を持つ。

Kraus 演算子: $d_B \times d_A$ の行列の集合 $\{K_j^{A \rightarrow B}\}_j$ で、

$$\sum_j (K_j^{A \rightarrow B})^\dagger K_j^{A \rightarrow B} = \mathbb{I}^A \quad \text{と満たすもの。}$$

$d_B \times d_A$ の行列

CPTP 写像 $\mathcal{J}^{A \rightarrow B}$ に対応する Kraus 演算子 $\{K_j^{A \rightarrow B}\}_j$ が存在し、

$$\mathcal{J}^{A \rightarrow B}(\rho^A) = \sum_j K_j^{A \rightarrow B} \rho^A (K_j^{A \rightarrow B})^\dagger$$

と表せる。

例)

1. $I=I$ 時間発展

$$\rho \mapsto U \rho U^\dagger \quad \& \quad U^\dagger U = I$$

\therefore Kraus 演算子 $\cong \{U\}$
 \hookrightarrow 1 to 1

2. 部分トレース

$$\rho^{AB} \mapsto \text{Tr}_B[\rho^{AB}] = \sum_{j=1}^{d_B} (I^A \otimes \langle e_j |^B) \rho^{AB} (I^A \otimes |e_j\rangle^B)$$

Kraus 演算子: $\{ I^A \otimes \langle e_j |^B \}_{j=1}^{d_B}$

$$[\text{check: } \sum_{j=1}^{d_B} (I^A \otimes \langle e_j |^B)^\dagger (I^A \otimes \langle e_j |^B) = \sum_{j=1}^{d_B} I^A \otimes |e_j\rangle\langle e_j|^B = I^A \otimes I^B]$$

* Kraus 表現は一意ではない \therefore ことに注意!!

$$\text{e.g.} \text{) } \text{Tr}_B \longleftrightarrow \{ I^A \otimes \langle f_\alpha |^B \}_{\alpha=1}^{d_B}$$

3. Pauli \leftrightarrow トレール (Pauli トレール)

1 qubit

I

ρ

CPTP

1 qubit

ρ

$$p_0 I + p_1 X \rho X + p_2 Y \rho Y + p_3 Z \rho Z$$

$\Rightarrow (p_0, p_1, p_2, p_3)$ は確率分布.

Pauli \leftrightarrow トレール

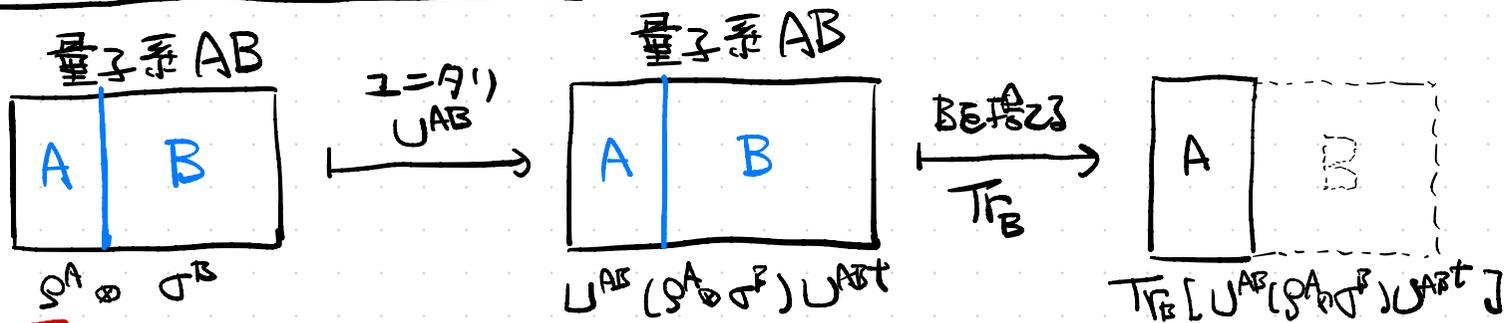
Kraus 演算子 (の一例) : $\{\sqrt{p_0} I, \sqrt{p_1} X, \sqrt{p_2} Y, \sqrt{p_3} Z\}$

2-4-3. 時間発展の拡張公理 - まとめ -

拡張公理 2.

時間発展 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 全系のユニタリ + 部分トレス Stinespring 拡張
 \iff 量子チャネル (CPTP 写像)
 \iff Kraus 表現.

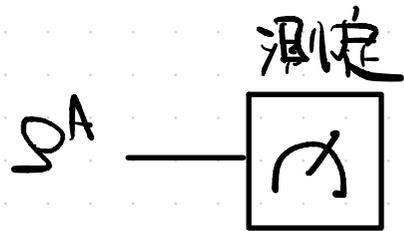
従来の公理 + 部分系を捨てる.



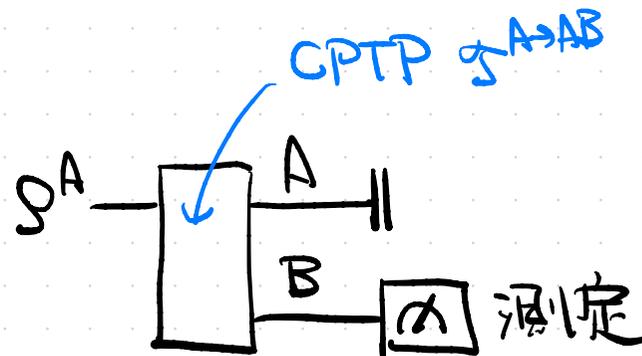
量子系 A の時間発展: 非ユニタリ

2.5. 量子測定 of 拡張

従来の測定



拡張
 \Rightarrow



系を“拡張”して、一部を測定

\Rightarrow 系Aにだけ着目すると、従来の測定
では記述できない。

拡張公理 3.

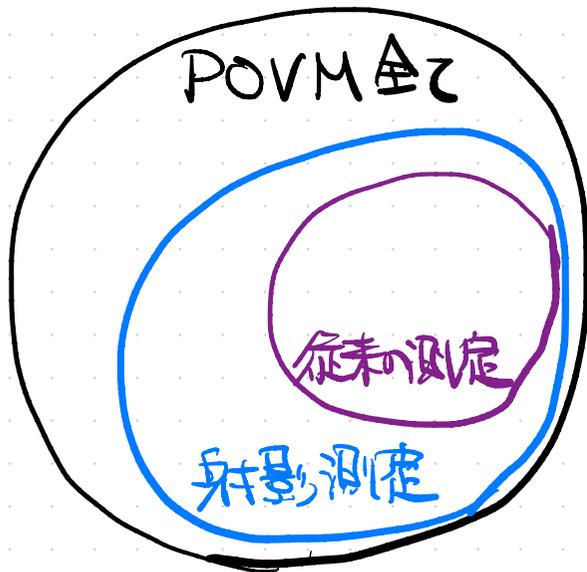
量子測定 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ Positive-Operator-Valued Measure

POVMとは?

行列の集合 $\{M_j\}_j$ として $M_j \geq 0$ とおけるもの。
 $\sum_j M_j = I$

ρ を測定 \Rightarrow 結果 j を prob. $\text{Tr}[M_j \rho]$ である。

[測定後の状態を表にする場合は、Instrument]

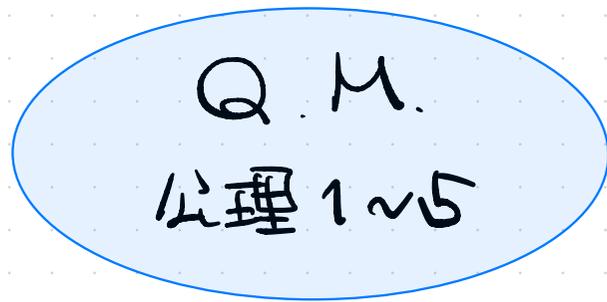


✓ 射影測定 (Projection-Valued Measure)
 \forall_j, M_j が 射影演算子 ($M_j^2 = M_j$).

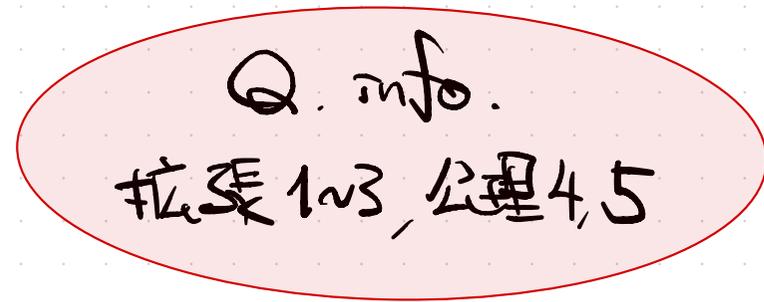
✓ 従来のもの = PVM かつ M_j が $\text{rank } 1$.
 $= |e_j\rangle\langle e_j|$.

\Rightarrow のとき $\sum_{j=1}^d M_j = |e_j\rangle\langle e_j|$

2-6. コメント



全系を見る
イメージ



部分系も重要,

(広義の) Q. info. の目標,

この五公理に基づいて、何が可能で、何が不可能かを
理解し、応用に繋げる。

“何が” ... 情報処理 (計算、通信、暗号 etc...)

物理現象 (物性、量子重力、宇宙 etc...)

化学、生物、etc...

3. 量子情報の基礎

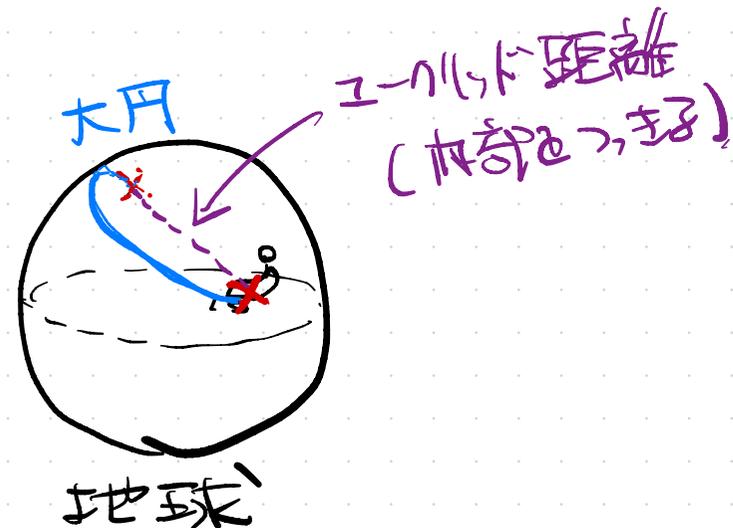
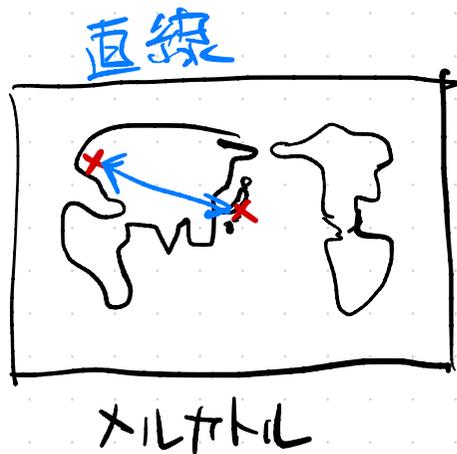
3-1. 量子状態の距離

「量子状態 = 密度行列」なので、行列間の距離(ノルム)を用いるがよい。

数学的には様々な行列ノルムが存在するが、

物理や情報処理では、目的に沿った適切なノルムを用いることが重要。

eg.) 地図上のモリ



旅行したい!! ----- 大円距離がよい。
物理(宇宙線etc.)を知りたい!! ----- ユークリッド距離
中々んごたい!! ----- ヌルカトル直線

⇒ 目的に応じて、適切なノルムは異なる。

量子情報では、何らかのプロトコルの性能と直結するノルムが重要。

= "操作的な意味をもつ"

よく用いられるのが、

1. トレス距離 (trace distance)
2. 忠実度 (fidelity)

3-1-1. 1-L-2 距離

数学によく用いられる行列のノルム: Schatten p-ノルム

$$\|M\|_p := \left(\text{Tr}[(M^\dagger M)^{p/2}] \right)^{1/p}$$

$1 \leq p \leq \infty \Rightarrow$ ノルムの公理を満たす.

$$M = \sum_j m_j |e_j\rangle\langle e_j|$$

と対角化

e.g.)

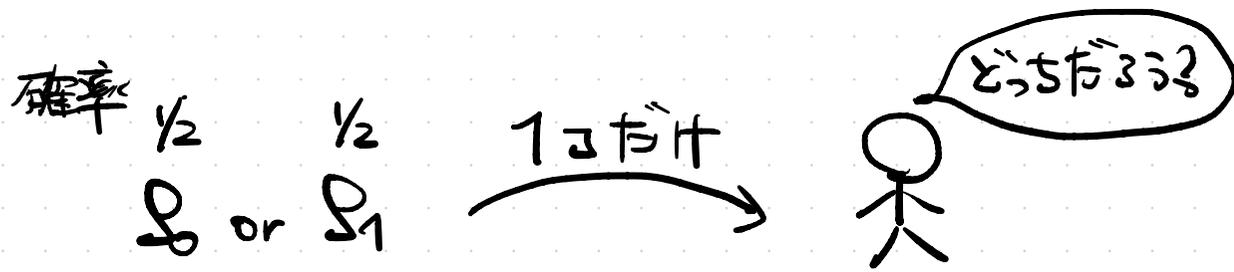
p=1: Trace ノルム $\|M\|_1 = \text{Tr} \sqrt{M^\dagger M} = \sum_j |m_j|$

p=2: Hilbert-Schmidt ノルム $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}[M^\dagger M]} = \sqrt{\sum_j m_j^2}$

p=∞: Operator ノルム $\|M\|_\infty = \sup_{|z\rangle \in \mathcal{H}} \frac{|M|z\rangle|}{\|z\rangle|} = \max_j |m_j|$

* $\|M\|_\infty \leq \|M\|_2 \leq \|M\|_1 \leq \sqrt{d} \|M\|_2 \leq d \|M\|_\infty$

3-1-2. トレス距離の“操作的な”意味.



↳ どちら = ϵ : = 値の POVM $\{M_0, M_1\}$.

最大成功確率 $P_{\text{succ}} = \max_{\{M_0, M_1\}} \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}[M_0 \rho_0] + \frac{1}{2} \text{Tr}[M_1 \rho_1] \right\}$

定理 [Holevo-Helstrom]

$$P_{\text{succ}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \|\rho_0 - \rho_1\|_1 \right)$$

$\Rightarrow \rho_0$ と ρ_1 のトレス距離が大ければ、1回のPOVMで見分けやすい.

NOTE: 状態を見分けることは、全ての情報処理の基本.

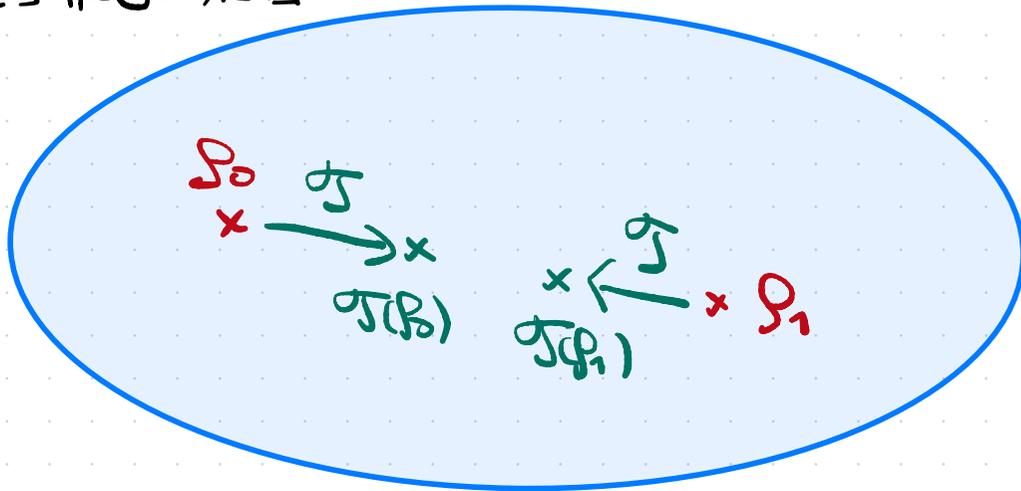
3-1-3. データ処理不等式

$\forall \mathcal{J}^{A \rightarrow B}$: CPTP $\forall \rho^A, \sigma^A$: 状態.

$$\| \mathcal{J}^{A \rightarrow B}(\rho^A) - \mathcal{J}^{A \rightarrow B}(\sigma^A) \|_1 \leq \| \rho^A - \sigma^A \|_1$$

Data Processing Inequality

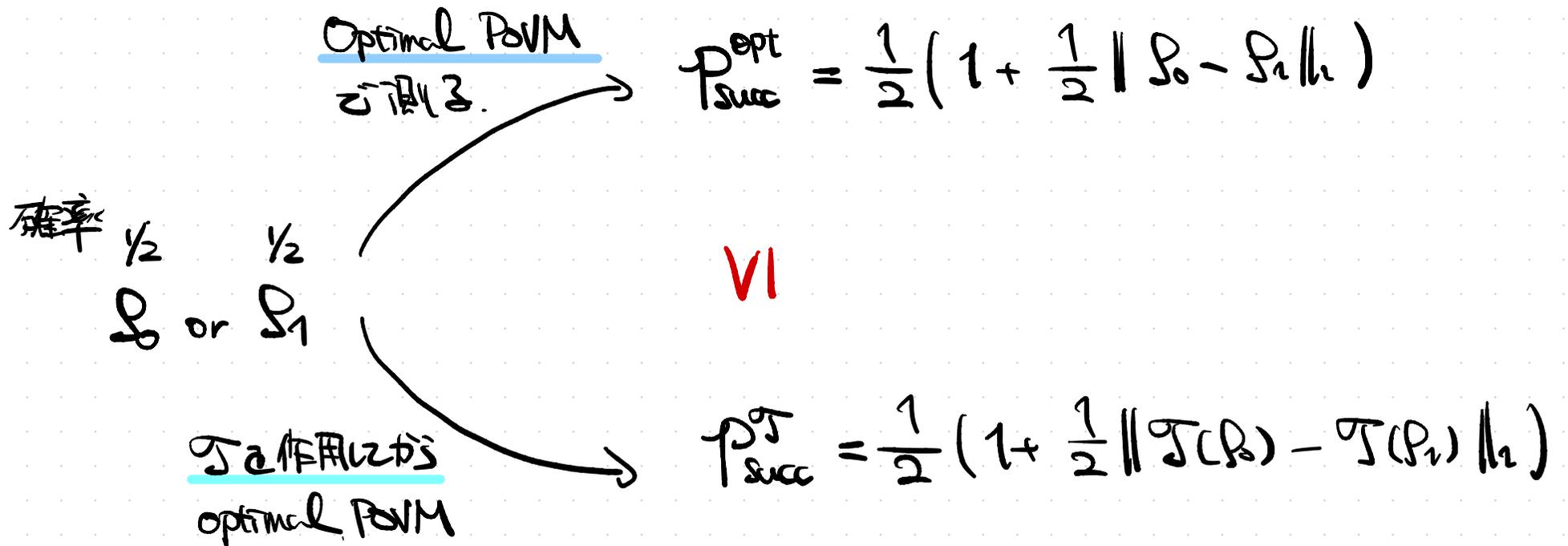
量子状態の集合



量子チャンネルで状態の距離が離れずとはない。

特に、状態識別の文脈では、

量子チャンネルに作用しても、 ρ と σ の識別確率は増えない。



この場合 $\rho = \rho_0 = \rho_1 = \rho$.

DPI は、操作的に "真, 実な" 距離 ρ 持つ性質

↳ Schatten p -ノルムの中で DPI を満たすのは 1 -ノルム (距離) だけ。

3-1-4. 忠実度 (fidelity)

純粋状態 $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ の距離 \approx その内積 $|\langle\psi|\varphi\rangle|^2$

↓ 密度行列に一般化したもの

忠実度 $F(\rho, \sigma) := \|\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}\|_1^2 = \left(\text{Tr}\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}\right)^2$

NOTE: $0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$ である。

- $F(\rho, \sigma) = 1 \Leftrightarrow \rho = \sigma$
- $F(\rho, \sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho \perp \sigma$

適切な基底で

$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Uhlmann の定理.

ρ^A, σ^A の純粋化を各々、 $|\rho\rangle^{AB}, |\sigma\rangle^{AC}$ ($d_B \leq d_C$) とする。

$$F(\rho^A, \sigma^A) = \max_{V^{B \rightarrow C}} \left| \langle \sigma |^{AC} (I^A \otimes V^{B \rightarrow C}) | \rho \rangle^{AB} \right|^2$$

\swarrow $B \neq \bar{5}C$ の $3 \times 1 \times 1$)

\Rightarrow $\rho^A = \sigma^A$ とおき、その純粋化を $|\rho_1\rangle^{AB}, |\rho_2\rangle^{AC}$ とする。

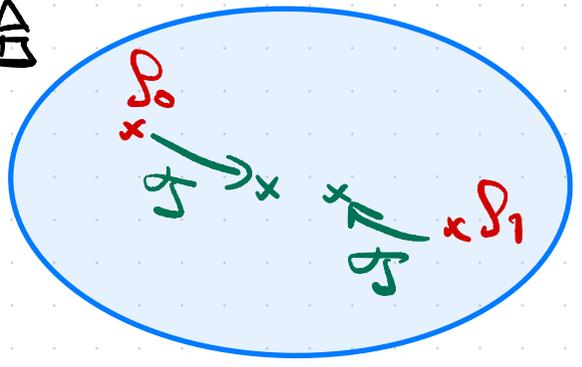
$$1 = \max_{V^{B \rightarrow C}} \left| \langle \rho_2 |^{AC} (I^A \otimes V^{B \rightarrow C}) | \rho_1 \rangle^{AB} \right|^2$$

$\Leftrightarrow |\rho_2\rangle^{AC} = (I^A \otimes V^{B \rightarrow C}) |\rho_1\rangle^{AB}$ となる $3 \times 1 \times 1$) $V^{B \rightarrow C} \neq \infty$ 存在する。

\curvearrowright 純粋化の自由度。

忠実度の DPI : $\forall \sigma : \text{CPTP}, F(\mathcal{J}(\rho), \mathcal{J}(\sigma)) \geq F(\rho, \sigma)$

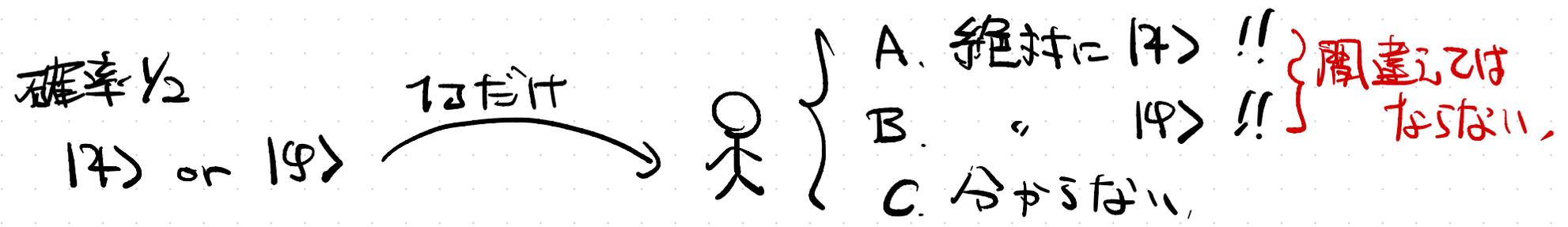
状態の集合



*状態が違付く \Rightarrow 忠実度 up に注意.

\hookrightarrow 忠実度は操作的な意味を持つ.

Unambiguous な状態識別.



$P_{\text{succ}} = 1 - |\langle 7|9\rangle|$

3-1-5. トレーズ距離と忠実度

Fuchs-van de Graaf 不等式.

$$1 - \sqrt{F(\rho, \sigma)} \leq \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1 \leq \sqrt{1 - F(\rho, \sigma)}$$

↳ トレーズ距離と忠実度は大体似た性質を捉えた測度

トレイズ距離版の Uhlmann の定理

ρ^A, σ^A の純粋化を各々、 $|\rho\rangle^{AB}, |\sigma\rangle^{AC}$ ($d_B \leq d_C$) とすると、

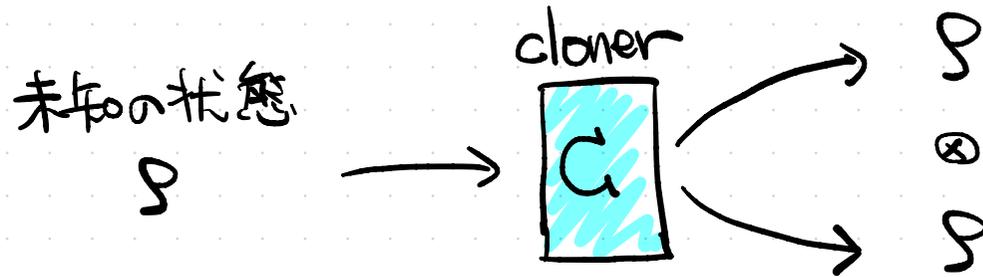
以下をみたすイソメトリ $V^{B \rightarrow C}$ が存在する。

$$\|V^{B \rightarrow C} |\rho\rangle\langle\rho|^{AB} (V^{B \rightarrow C})^\dagger - |\sigma\rangle\langle\sigma|^{AC}\|_1 \leq 2 \sqrt{\|\rho^A - \sigma^A\|_1}$$

← すごく重要。若菜さんの講義で使う。

3-1-6. No クローニング定理

クローニングとは?



⇒ これは、(古典でも量子でも) 実現不可能。

∴) ρ, σ を任意の状態とする。

忠実度の DPI より、
$$F(\underbrace{C(\rho)}_{\rho^{\otimes 2}}, \underbrace{C(\sigma)}_{\sigma^{\otimes 2}}) \geq F(\rho, \sigma)$$

$$F(\rho^{\otimes 2}, \sigma^{\otimes 2}) = \|\sqrt{\rho^{\otimes 2}} \sqrt{\sigma^{\otimes 2}}\|_1^2 = (F(\rho, \sigma))^2$$

よって、 $(F(\rho, \sigma))^2 \geq F(\rho, \sigma) \iff F(\rho, \sigma) = 0 \text{ 或 } 1$

$0 \leq F(\rho, \sigma) \leq 1$

∴ " ρ, σ が任意" と反する。 □

NOTE よく勘違いされるが、古典であることもクローンコピーできない。



古典の“状態” = 確率分布。

eg.) さいころ: $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{6})$

天気: $(50\%, 30\%, 20\%)$
晴 曇 雨

↪ 基底を固定した密度行列が $\begin{pmatrix} p_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$ と表現可。

密度行列全体の
集合

純粋状態

古典的な状態。

量子論は古典論を
含む!!

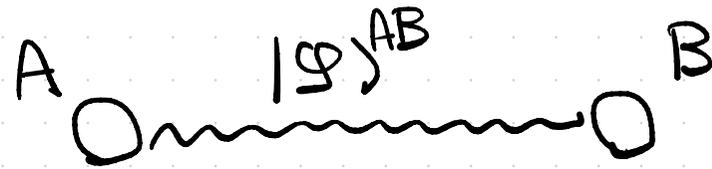
↳ 「古典的 p → 純粋」状態の集合は $\rho \rightarrow \rho$ 可能。

$$(p_0, p_1, \dots, p_{d-1}) = \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) \\ (0, 1, 0, \dots, 0) \\ \vdots \\ (0, \dots, 0, 1) \end{cases}$$

全直交になる。

3-2. Schmidt分解と最大エンタングル状態

3-2-1. Schmidt分解



二体系 AB の純粋状態 $|\psi\rangle^{AB}$ を基底で展開すると、

$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_A} \sum_{\alpha=1}^{d_B} C_{j\alpha} |e_j\rangle^A \otimes |f_\alpha\rangle^B$$

$d_A \times d_B$ の和 $\Rightarrow \mathbb{C}$

↓ “適切な”基底を用いると、和を減らせる。

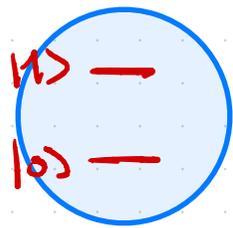
$$|\psi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{d_{\min}} \sqrt{p_j} |s_j\rangle^A \otimes |s_j\rangle^B \quad - \quad d_{\min} = \min\{d_A, d_B\}$$

$\{p_j\}_{j=1}^{d_{\min}}$ は確率分布。

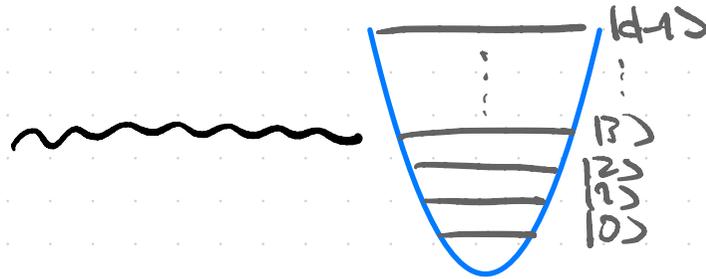
↑ $|\psi\rangle^{AB}$ の Schmidt 分解。

- $\{\sqrt{p_j} \}_{j=1}^{d_A d_B}$ は Schmidt 係数
 - $\{ |s_j^A\rangle \}_{j=1}^{d_A d_B} \times \{ |s_j^B\rangle \}_{j=1}^{d_A d_B}$ は Schmidt 基底
- と $\{ |i\rangle \}$.

例)



1 qubit



d次元調和振動子

1 qubit と結合して
 とは、果敢的に
 二次元系。

任意の純粋状態は、 $\sqrt{p} |s_0\rangle |s_0\rangle + \sqrt{1-p} |s_1\rangle |s_1\rangle$ と表す。

分解の見つけ方: 縮約密度行列を対角化。

$$|\varphi\rangle^{AB} = \sum_{j=1}^{\dim} \sqrt{p_j} |\psi_j\rangle^A \otimes |\psi_j\rangle^B$$

$$\rho^A = \sum_{j=1}^{\dim} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|^A$$

$$\rho^B = \sum_{j=1}^{\dim} p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|^B$$

3-2-2. 最大エンタングル状態 (Maximally Entangled State)

二体系の純粋状態を Schmidt 分解から

$$|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{d_{\min}}} \sum_{j=1}^{d_{\min}} |s_j\rangle^A \otimes |s_j\rangle^B$$

と与えられるもの。

Remark

1. 基底の自由度が残っているのに、一意には決まらない。

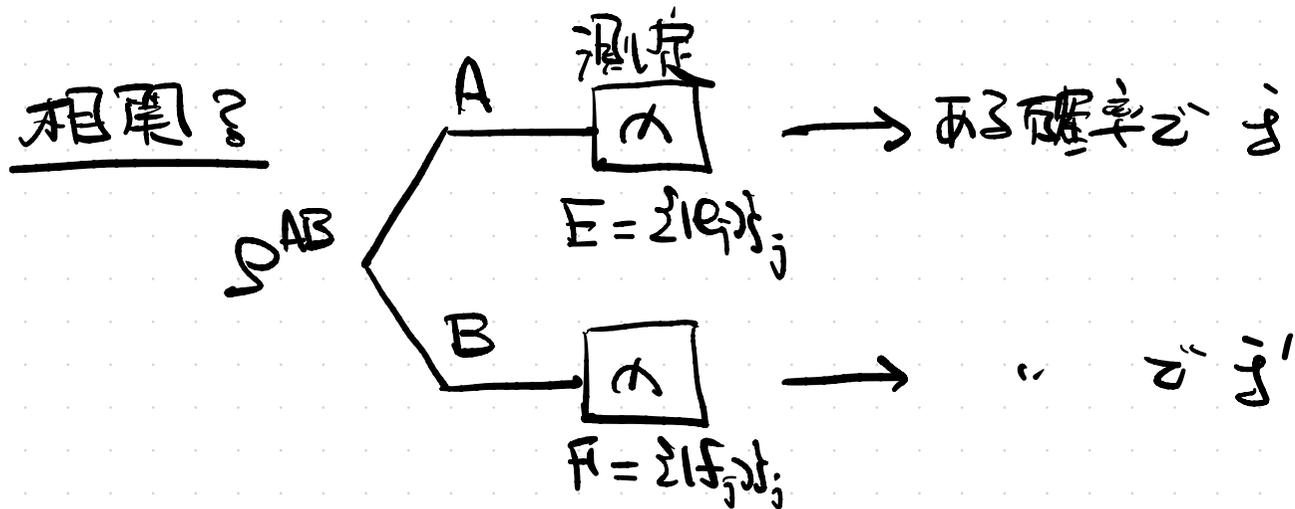
e.g.) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle \pm |1-\rangle)$, etc...

2. MES の 縮約密度行列は、($d_A \leq d_B$ のとき)

$$\rho^A = \frac{I}{d_A} \quad \& \quad \rho^B = \frac{1}{d_A} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

↑ 完全混合状態。

MESは、"最大の"量子相関を持つ。



Aの結果が j の時、必ず Bの結果も j なる。

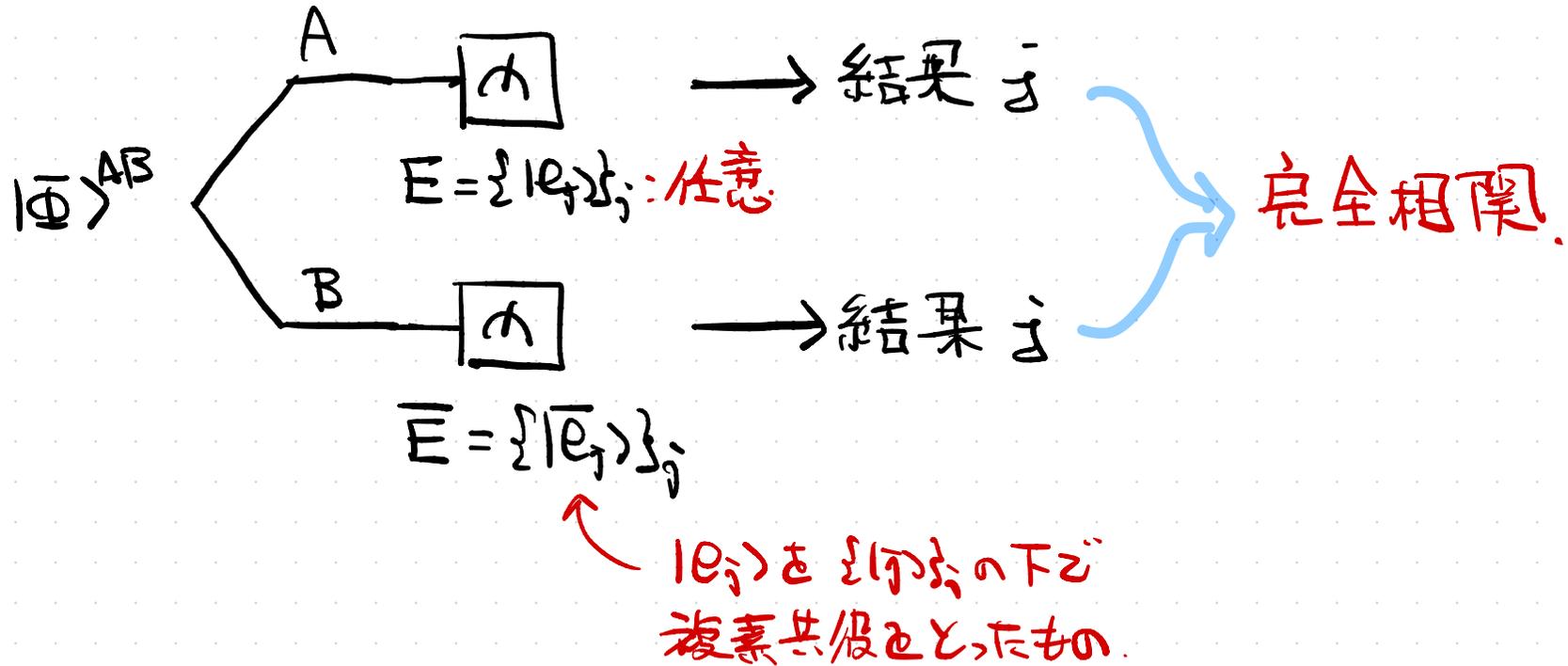
ρ^{AB} は測定基底 (E, F) の下で 完全に相関。

e.g) $d_A = d_B = d$

$\rho^{AB} = \sum_{j=1}^d p_j |e_j \times e_j\rangle^A \otimes |f_j \times f_j\rangle^B$ は、 (E, F) の下で完全相関。

↳ (E, F) 以外の測定基底では完全相関しない。

MESの場合: $|\Phi\rangle^{AB} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^d |j\rangle^A |j\rangle^B$



MESは 任意の測定基底 E に対して、
 (E, \bar{E}) の下で完全相関している。

\therefore

$|\Phi\rangle^{AB}$ の A を $\{|e_j\rangle\}_j$ で測り、 j を得たときの状態、 $|\Phi_j\rangle^{AB}$

$$|\Phi_j\rangle^{AB} \propto |e_j\rangle^A \otimes (\langle e_j|^A \otimes I^B) |\Phi\rangle^{AB}$$

$$\hookrightarrow |\Phi\rangle^{AB} \propto \sum_i |i\rangle^A |i\rangle^B$$

$$\propto |e_j\rangle^A \otimes \sum_i \langle e_j | i \rangle |i\rangle^B$$

\Rightarrow

$$|e_j\rangle^B = \sum_i \langle i | e_j \rangle |i\rangle^B$$

たのち、

$$|\bar{e}_j\rangle^B = \sum_i \overline{\langle i | e_j \rangle} |i\rangle^B = \sum_i \langle e_j | i \rangle |i\rangle^B$$

$$\therefore |\Phi_j\rangle^{AB} \propto |e_j\rangle^A \otimes |\bar{e}_j\rangle^B$$



この証明より、MES は任意の基底 $\{|e_j\rangle\}_j$ を用いて

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle^{AB} &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^d |j\rangle^A \otimes |j\rangle^B \\ &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^d |e_j\rangle^A \otimes |\bar{e}_j\rangle^B \end{aligned}$$

とかけ子 = とも分ける。

⇒ このよ様な 最大の量子相関 が、非自明な情報プロトコル を可能にする。

初歩: 量子テレポーテーション, 超高密度符号化, etc..

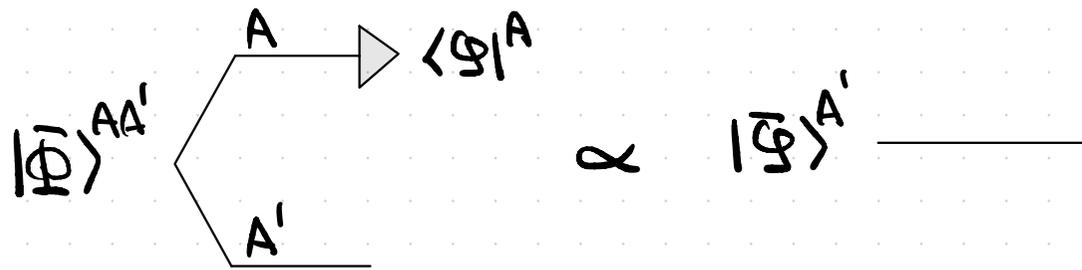
Advanced: 量子鍵配送, entanglement-assisted
量子誤り訂正 etc..

3-3. 最大エンタングル状態を用いたプロトコル — 初歩 —

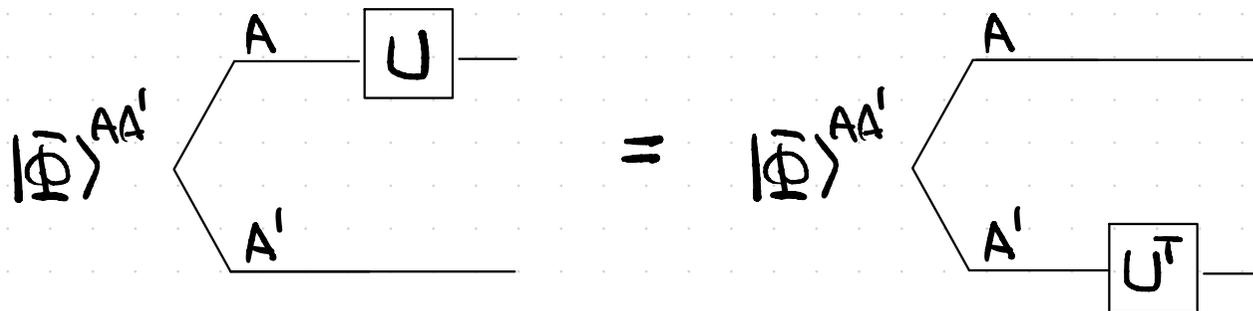
3-3-1. MES の性質.

MES $|\Phi\rangle^{AA'}$ $= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=1}^d |j\rangle^A |j\rangle^{A'}$ ($\dim \mathcal{H}^A = \dim \mathcal{H}^{A'} = d$) は以下を満たす.

1. $\forall |\varphi\rangle^A$ に対して, $(\langle \varphi|^A \otimes I^{A'}) |\Phi\rangle^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{d}} |\varphi\rangle^{A'}$.

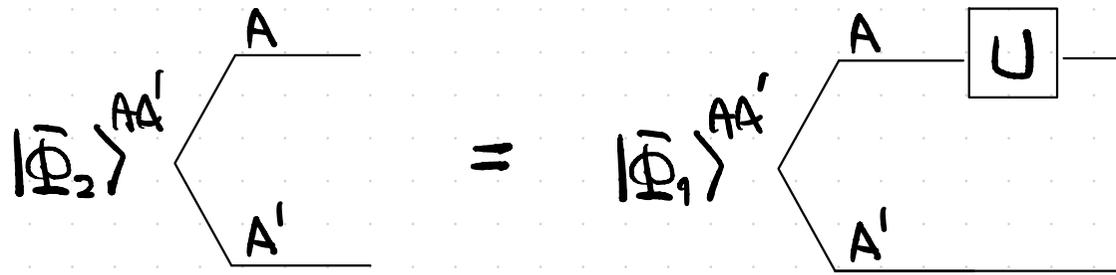


2. $\forall U$ (任意) U^A に対して, $(U^A \otimes I^{A'}) |\Phi\rangle^{AA'} = (I^A \otimes (U^{A'})^T) |\Phi\rangle^{AA'}$



転置

3. $|\bar{\Phi}_1\rangle^{AA'}$ と $|\bar{\Phi}_2\rangle^{AA'}$ が MES なら、以下を満たす $U = A' \cup A$ が存在する。

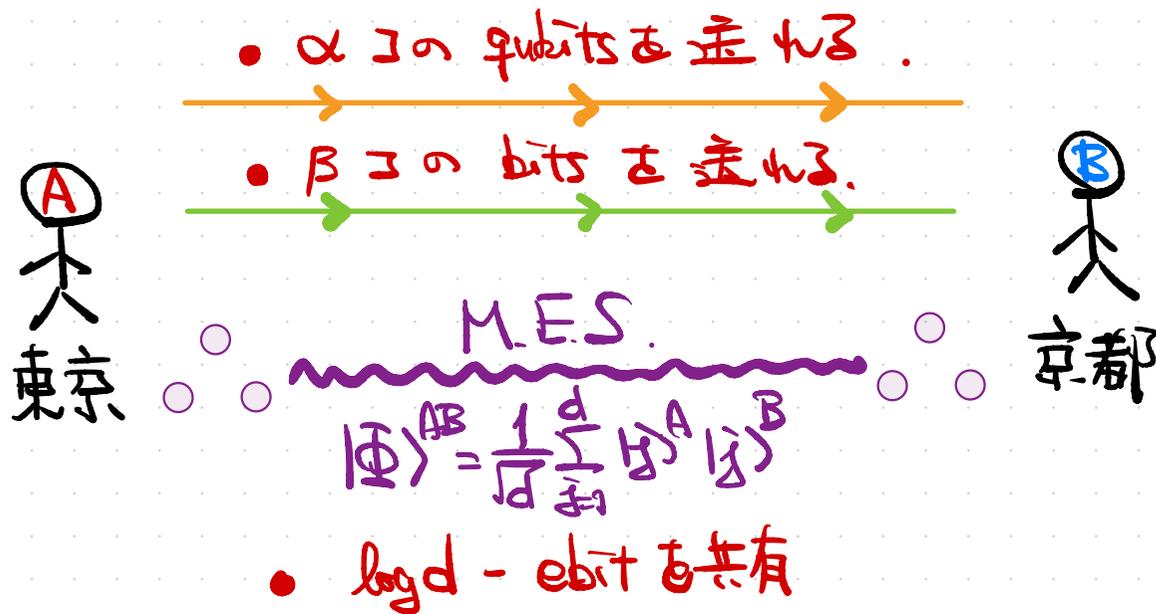


[純粋化の自由度]

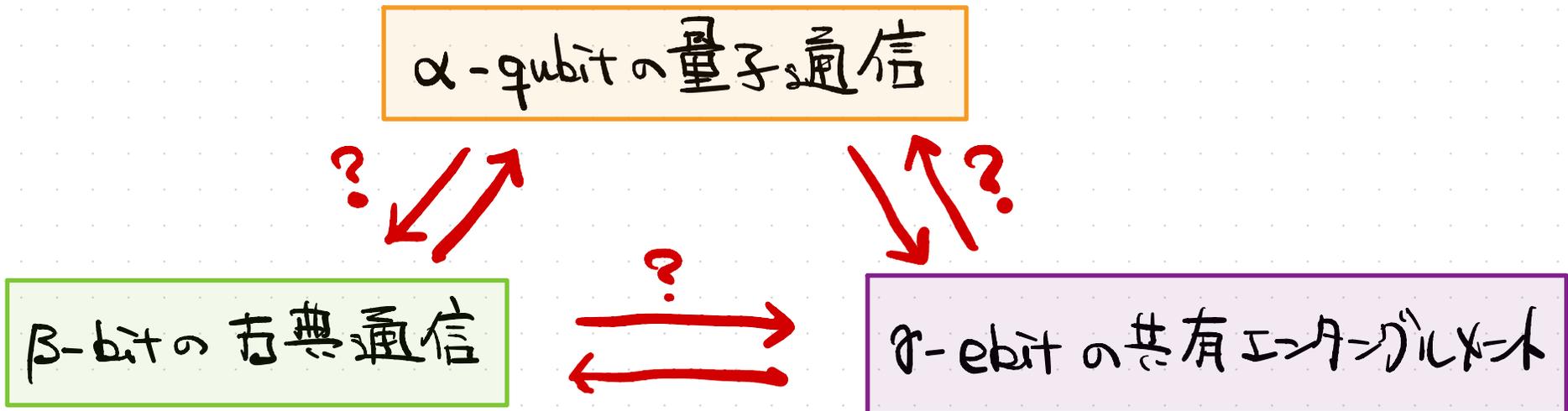
4. MES を使って $\mathcal{R}^{AA'}$ の基底を作れる。

つまり、 $\{|\bar{\Phi}_j\rangle^{AA'}\}_{j=1}^{d^2}$ として、 $\langle \bar{\Phi}_i | \bar{\Phi}_j \rangle = \delta_{ij}$ なるものが存在する。

3-3-2. リソースとしての MES と通信

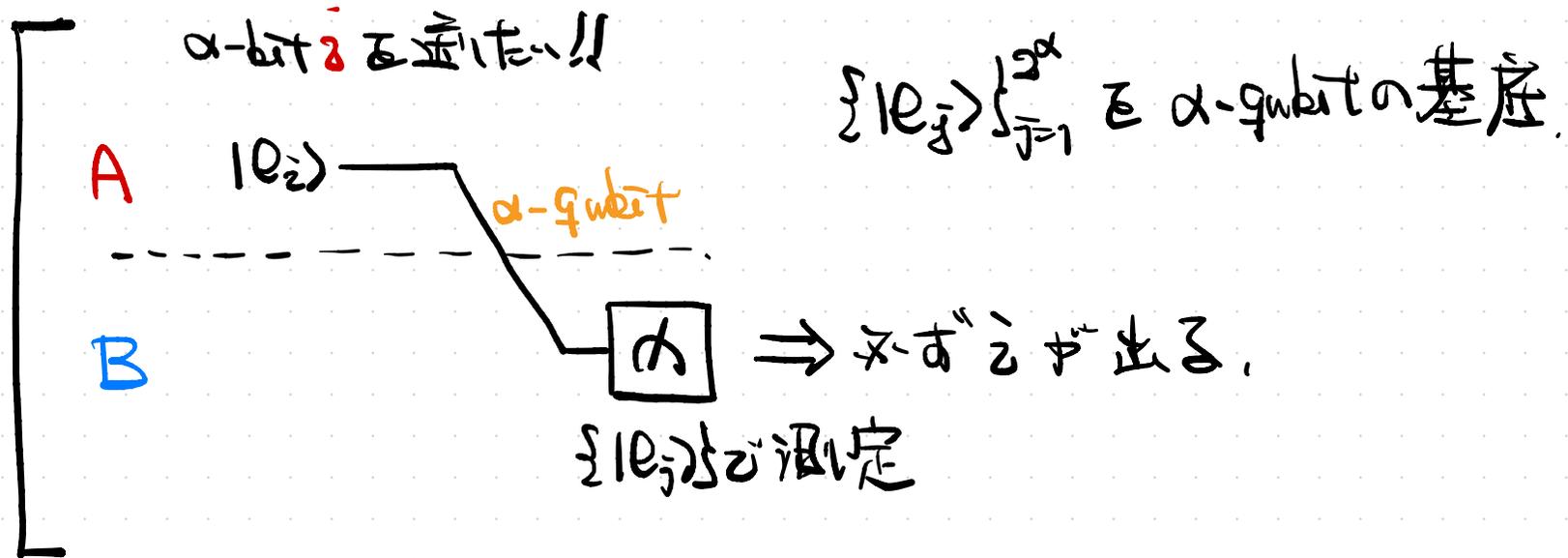


(1) イズレスな通信のリソース理論

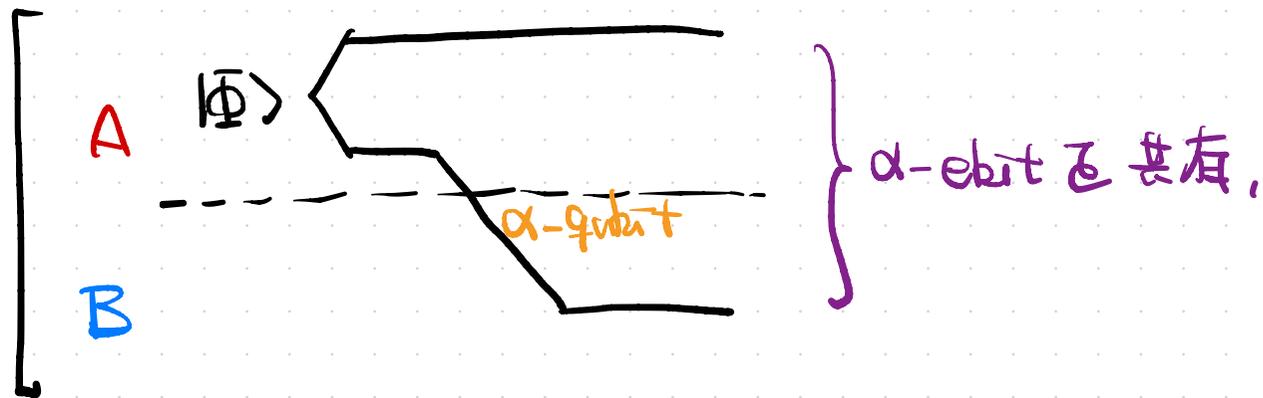


例)

1. β -bit の古典通信 \longrightarrow 0 -qubit の量子通信
2. α -qubit の量子通信 \longrightarrow α -bit の古典通信



3. α -qubit の量子通信 \longrightarrow α -ebit の共有エンタングルメント.



このように考えることで、以下が可能と分かる。

α -qubit の量子通信

$\alpha \geq \beta$

β -bit の古典通信

$\alpha \geq \gamma$

γ -ebit の共有エンタングルメント

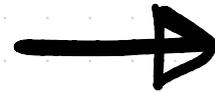
⇒ 全く面白くないが、各リソースを組み合わせると。

非自明な量子と古典通信の実現可。

3-3-3. 超高密度符号化 (superdense coding)

α -qubit の量子通信

α -ebit の共有エンタングルメント

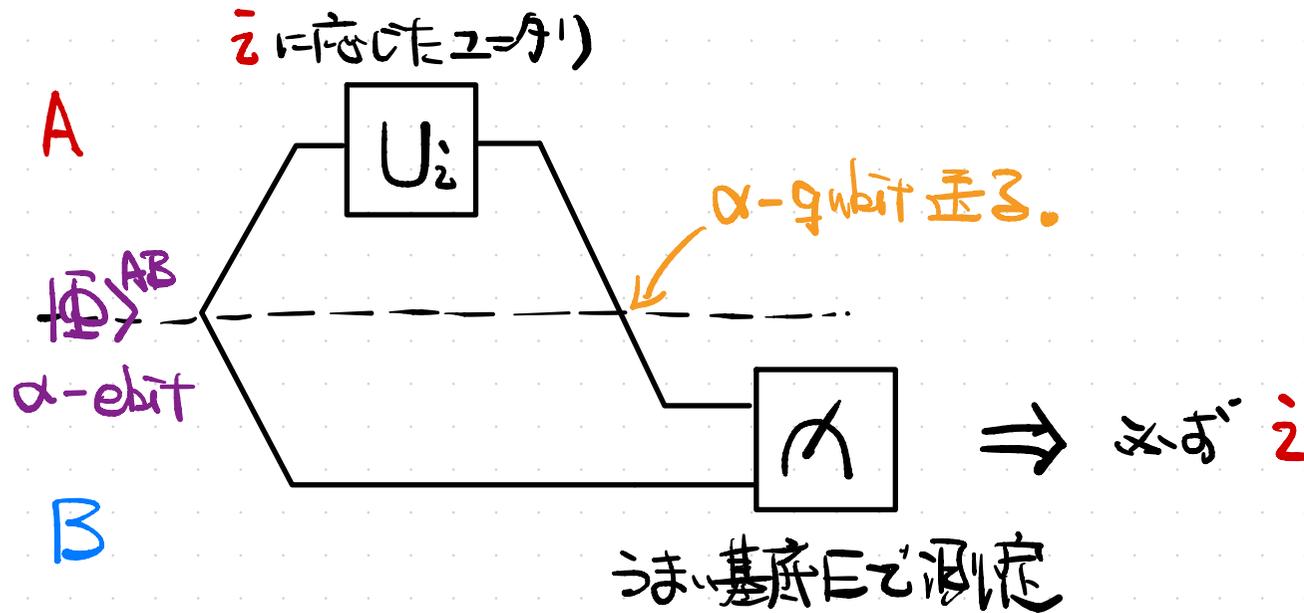


2α -bit の古典通信

↑ 2倍

NOTE: 各々を単体で用いると、最大で α -bit の古典通信,

どうやるか? 送りたい古典ビット $i \in \{1, \dots, 2^{2\alpha}\}$

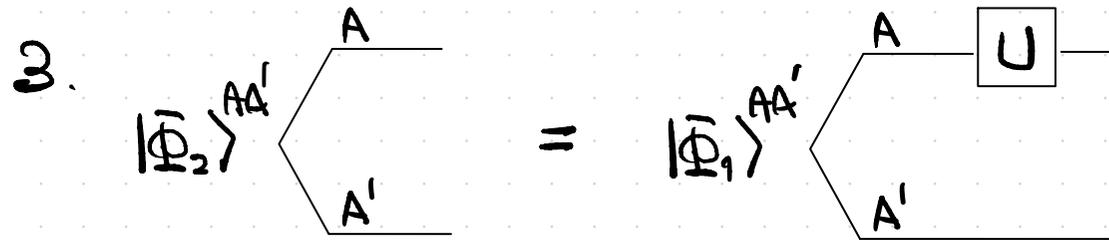


U_i と E の選り方は?

MESの性質4と3を思い出す。

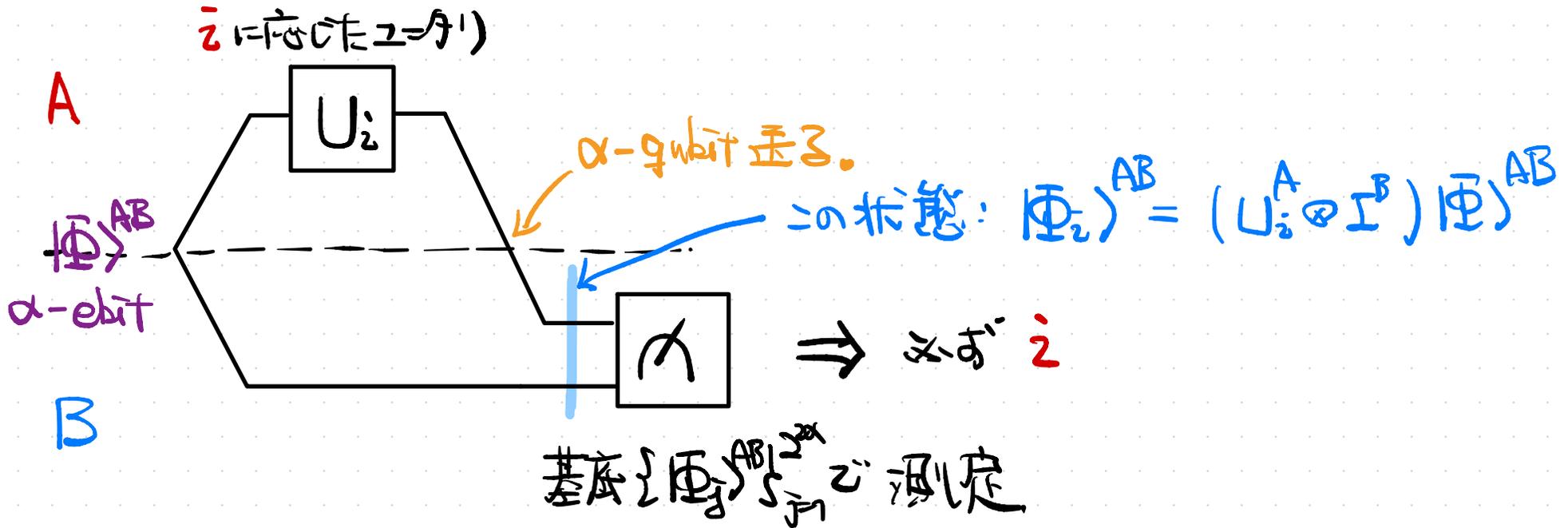
4 MES だけだと $\mathcal{H}^{AA'}$ の基底を作れない。

これは $E = \{ |\Phi_j\rangle^{AB} \}_{j=1}^{2^{\alpha}}$ とする。



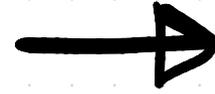
これは A_i を作る。

$\Rightarrow |\Phi_j\rangle^{AB} = (U_j^A \otimes I^A) |\Phi\rangle^{AB}$ なる $i=1$ の集合 $\{U_j^A\}_{j=1}^{2^{\alpha}}$ がある。



α -qubit の量子通信

α -ebit の共有エンタングルメント



2α -bit の古典通信



MESの性質3と4

自然な疑問:

- 1. 2α -bit よりも多.. bit を送れる? \Rightarrow No!!
- 2. MES 以外で送れる? \Rightarrow No!!

⋮

\hookrightarrow 超高密度符号化は、量子通信 + エンタングルメント \Rightarrow 古典通信 のタスクにおいて

最適なプロトコル。

3-3-4. 量子テレポーテーション

2α-bitの古典通信

α-ebitの共有エンタングルメント

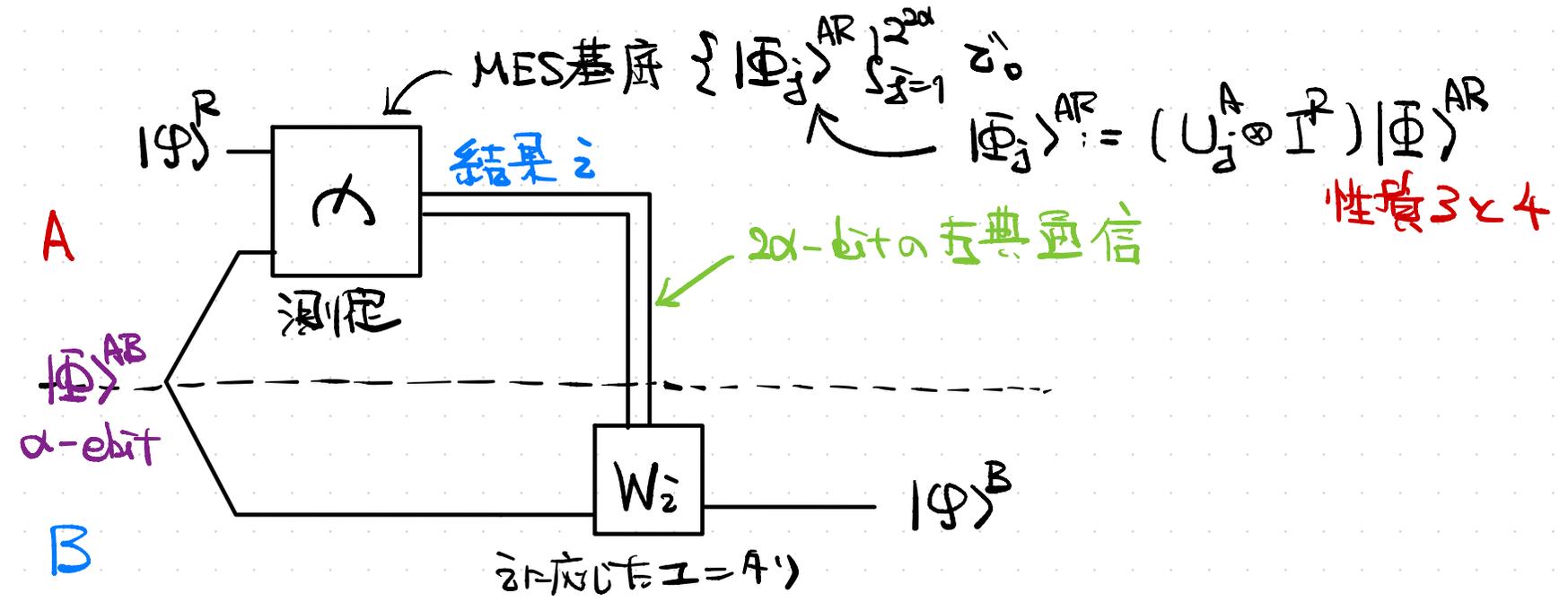


α-qubitの量子通信

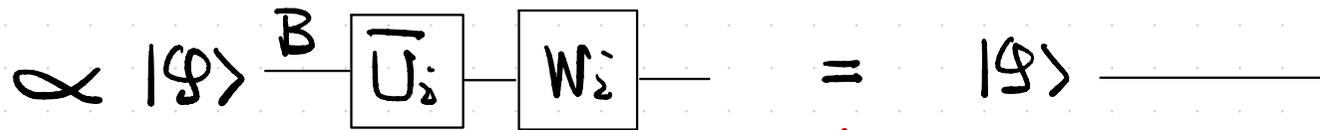
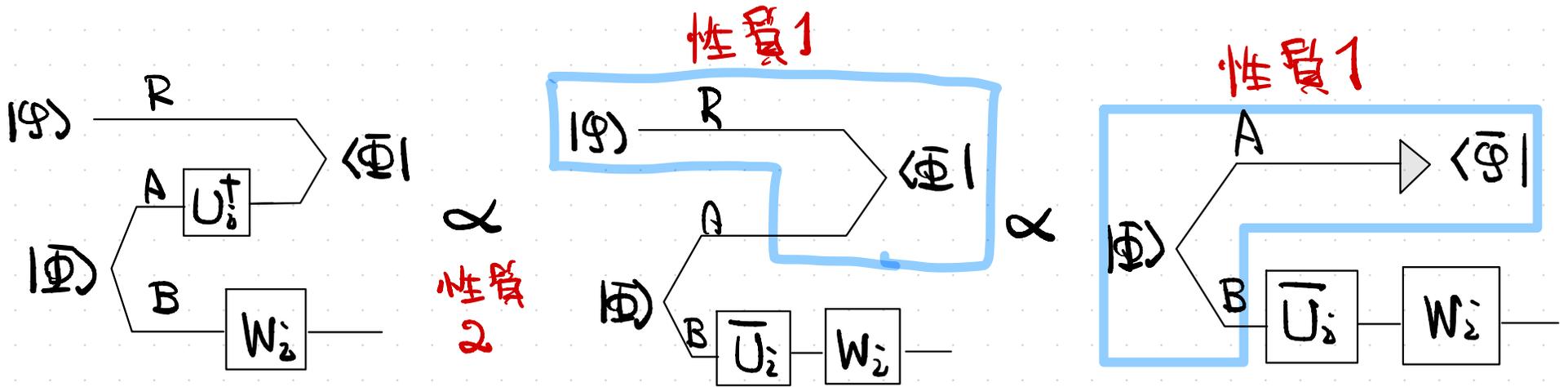
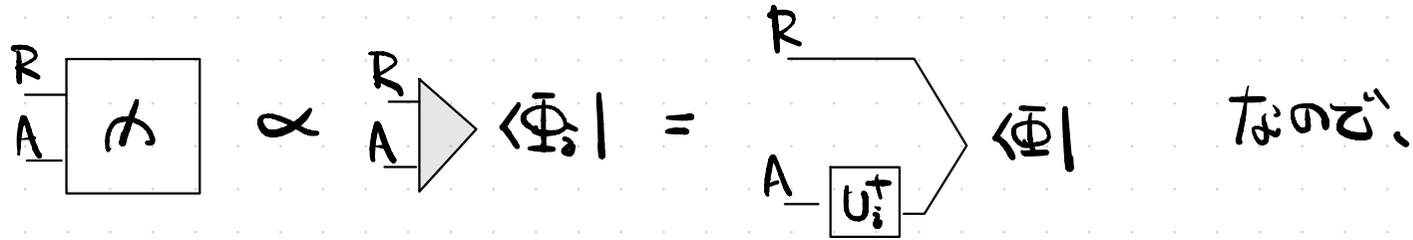
0から有限に!!

NOTE: 各々も単体で用いるビットは、0-qubit じゃない。

どうやるか? 送りたい状態 $|\psi\rangle^R$: α-qubit の状態



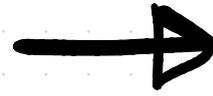
∴) 測定結果が 2 のとき.



$$W_2 = (\bar{U}_2)^\dagger = U_2^\top \quad \text{ととる.}$$

2α -bitの古典通信

α -ebitの共有エンタングルメント



α -qubitの量子通信

自然な疑問:

1. α -qubitよりも多量-qubitを送れる \Rightarrow No!!

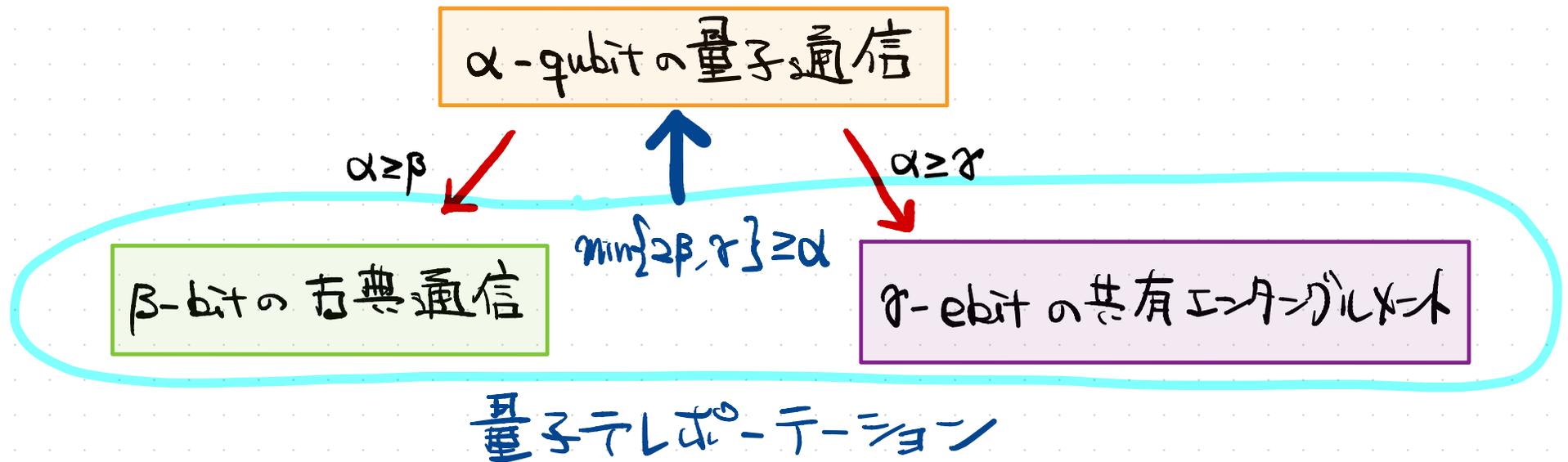
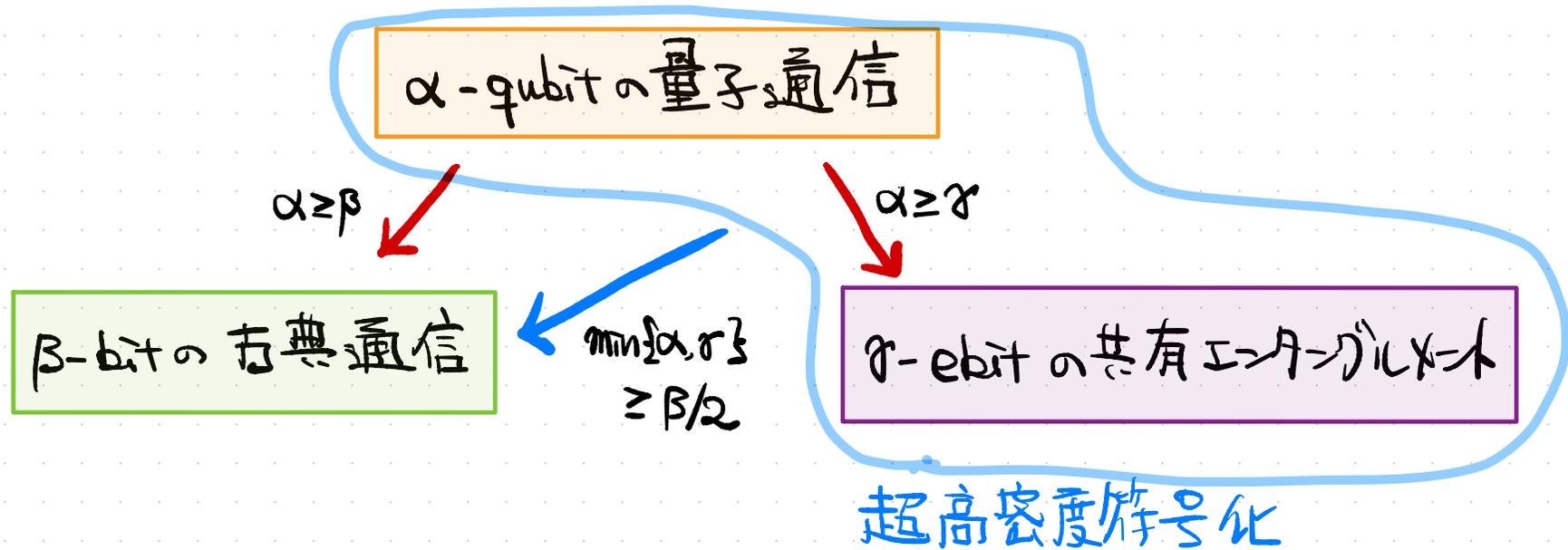
2. MESAHAで送れる? \Rightarrow No!!

⋮

\Rightarrow 量子テレポーテーションは、古典通信 + エンタングルメント \Rightarrow 量子通信のタスクにおいて

最適なプロトコル。

3-3-5. (1) イズミタ通信のリソース理論のまとめ



この2つのプロトコルは発見法的に見つけたが、

(古典通信, 量子通信, 共有エンタングルメント)の3つのリソースの

任意の達成可能な変換は、超高密度符号化と

量子テレポーテーション (と自明なプロトコル) の組み合わせで

実現できる。

⇒ 3つのリソース変換に関する非自明なプロトコルは

超高密度符号化と量子テレポーテーションだけ。