



第20回NEXT(数値トカマク)研究会

2015年1月13日(火) – 1月14日(水) 京都テルサ

# 圧縮性MHDに対する ロバストな数値計算法の開発

Development of a robust scheme  
for compressible MHD

三好 隆博

広島大学大学院理学研究科



# MHD code projects

## For laboratory plasmas

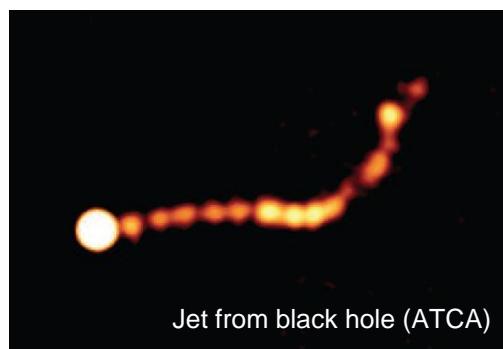
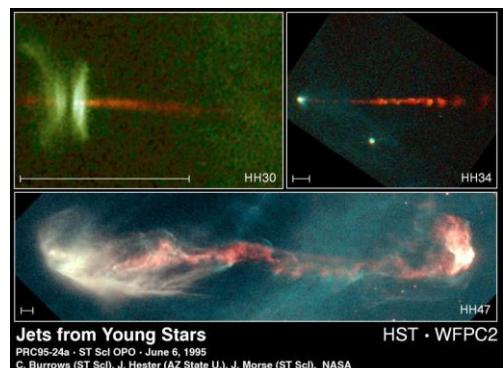
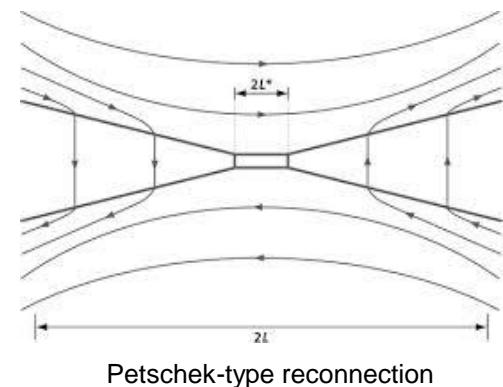
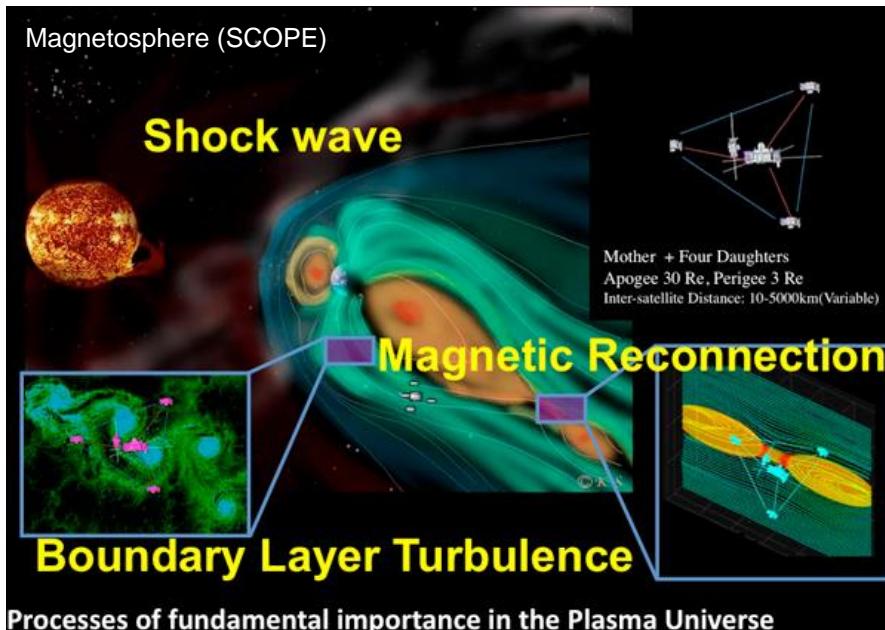
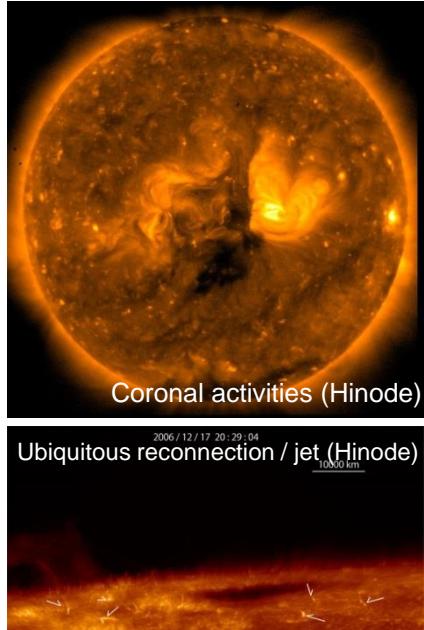
Project	Developer	MHD Scheme	div B	Grid
<b>(US)</b>				
NIMROD	Sovinec	FEM(2D)+SP(1D) / implicit	Diffusion	Triangular
M3D-C <sup>1</sup>	Ferraro, Jardin	C <sup>1</sup> FEM / implicit	Vec. pot.	Triangular
<b>(EU)</b>				
XTOR-2F	Lütjens	FD(1D)+SP(2D) / NK implicit	—	Mag. Flux
<b>(Japan)</b>				
MIPS	Todo	4th FD / 4th RKG	—	Cylindrical
MINOS	Miura	8th Compact FD / 4th RKG	—	Curvilinear

Any information or corrections are appreciated...

- Extended MHD model
- Not designed for shock capturing



# Shocks in space plasmas





# Motivation and objectives

---

- In compressible MHD codes for laboratory plasmas, time integration methods have been polished so as to solve stiff problems.
- But, those codes are not designed for shock capturing that may be needed in the near future. (e.g., HiFi code at PSI-Center)
- Shocks and turbulence are universally observed in space. Thus, the development of robust shock capturing schemes has been highly progressed.
- **Current status and challenges of the shock capturing scheme for MHD** are presented with emphasis on our results.



# Compressible MHD equations

## □ Ideal MHD equations (Non-conservative form)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad : \text{continuity equation}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad : \text{equation of motion}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad : \text{adiabatic equation}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad : \text{induction equation}$$

- Various non-conservative forms can be obtained using vector identities



# Compressible MHD equations

## □ Ideal MHD equations (**Conservative form**)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad : \text{mass conservation}$$
$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p_T \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}) = 0 \quad : \text{momentum conservation}$$
$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot [(e + p_T) \mathbf{v} - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})] = 0 \quad : \text{energy conservation}$$
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0 \quad : \text{flux conservation}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad p = (\gamma - 1) \left( e - \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} - \frac{\mathbf{B}^2}{2} \right), \quad p_T = p + \frac{\mathbf{B}^2}{2}$$

# Shock capturing scheme

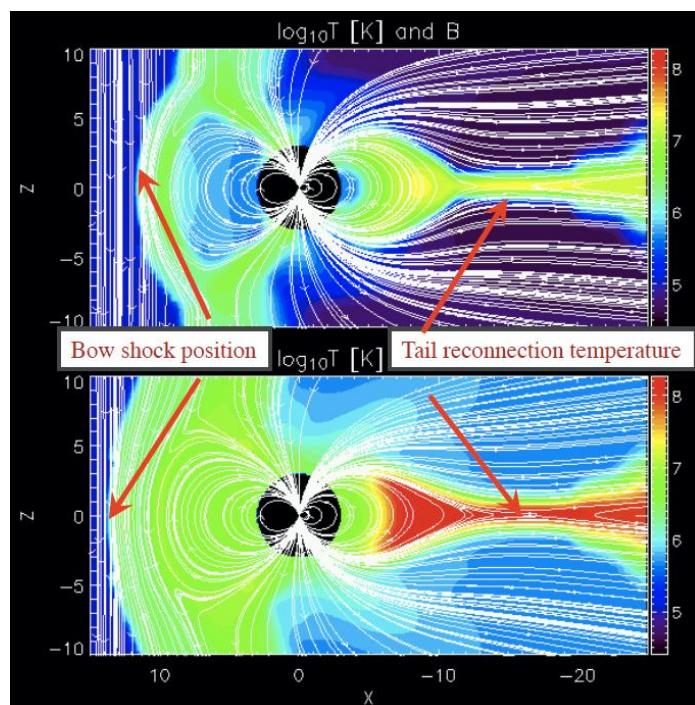
## □ Non-conservative scheme

- Based on non-conservative form
  - Converge to unphysical shock
- Hou-LeFloch [1994]

## □ Conservative scheme

- Based on conservative form
  - Converge to physical shock
- Lax-Wendroff [1960]  
Harten [1980]
- Difficult to preserve positivity

Conservative vs Non-conservative



“Computational Tutorial: MHD”, Toth



# Shock capturing scheme

---

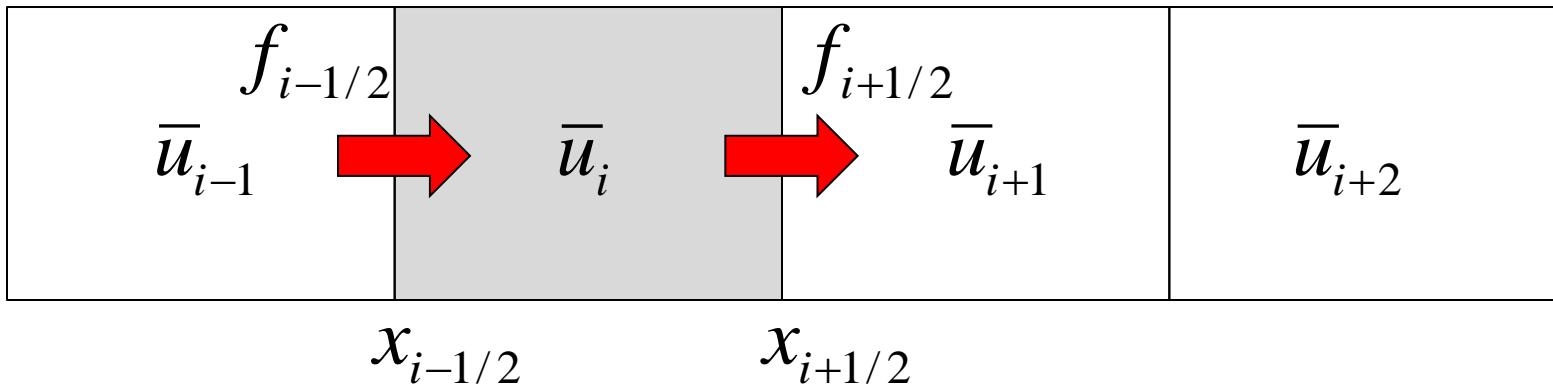
- Non-conservative scheme
  - Finite difference method
  - Finite element method
  
- Conservative scheme
  - Finite difference method
    - FD-WENO, Compact FD+LAD, etc.
  - Finite element method
    - RKDG, etc.
  - Finite volume method
    - MUSCL, FV-WENO, etc.



# Shock capturing scheme

## □ 1D finite volume method

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \bar{u}_i + \frac{f(u(x_{i+1/2}, t)) - f(u(x_{i-1/2}, t))}{\Delta x} = 0$$



## ■ Numerical flux

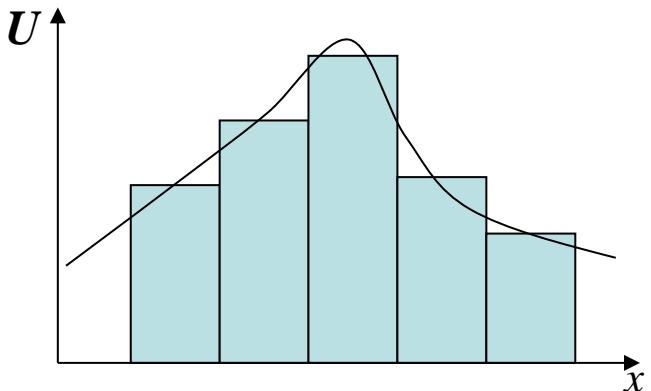
$$f(u(x_{i+1/2}, t)) \equiv f_{i+1/2} = f(\dots, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}, \dots)$$

# Approximate Riemann solver

## □ Approximate Riemann solver

$$\iint \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

- Define piecewise constants

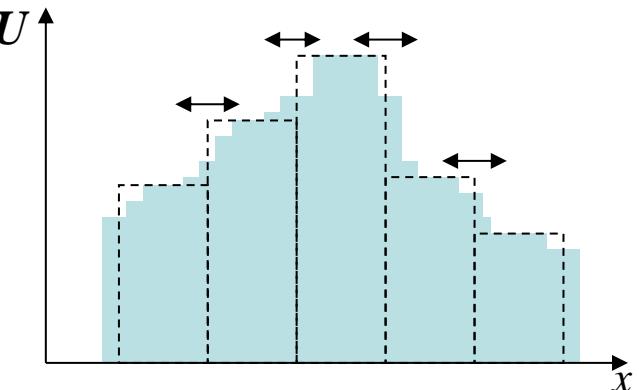


# Approximate Riemann solver

## □ Approximate Riemann solver

$$\iint \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

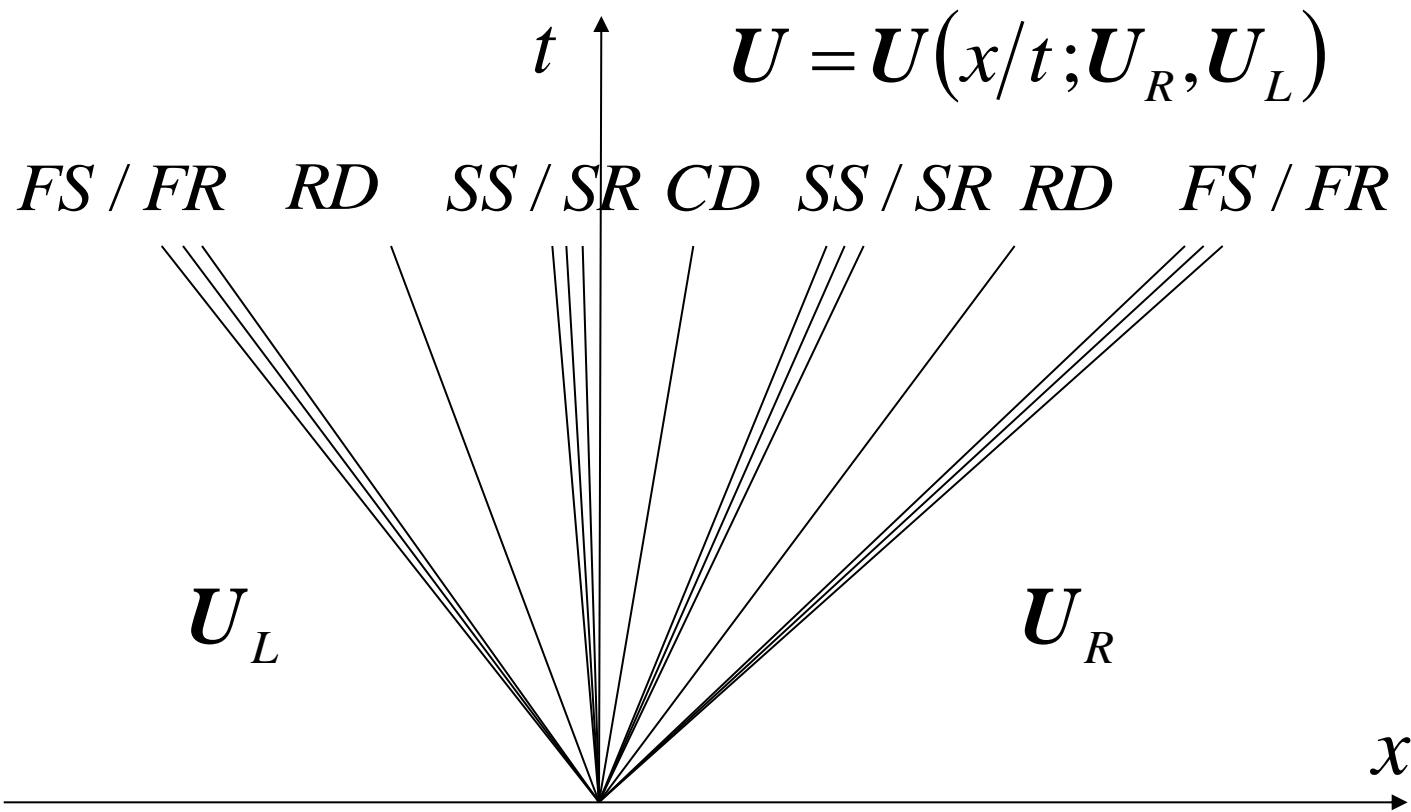
- Define piecewise constants
- Solve local Riemann problems





# Riemann problem

- Riemann problem = Shock tube problem
- 7-waves can be excited in 1D MHD system  
(shock, expansion wave, compound wave)

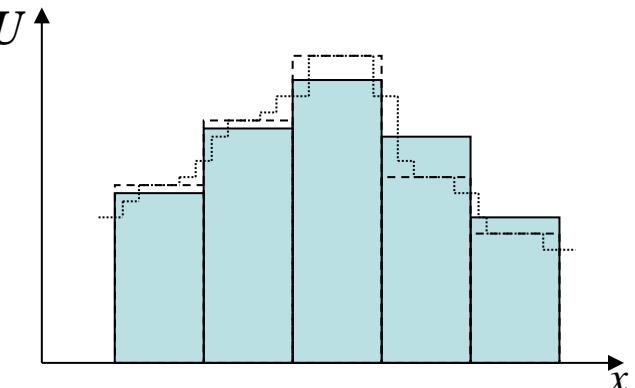


# Approximate Riemann solver

## □ Approximate Riemann solver

$$\iint \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

- Define piecewise constants
- Solve local Riemann problems
- Average state variables

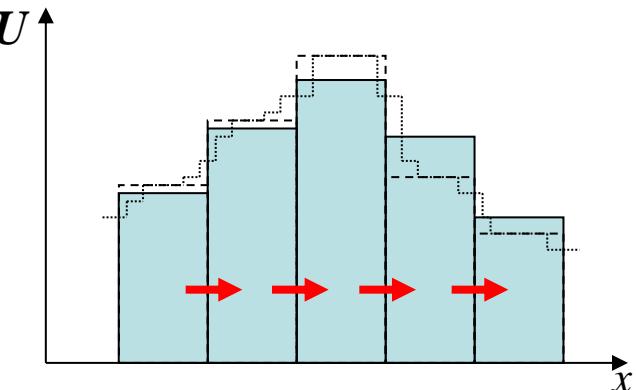


# Approximate Riemann solver

## □ Approximate Riemann solver

$$\iint \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) dx dt = \oint (\mathbf{U} dx - \mathbf{F} dt) = 0$$

- Define piecewise constants
- Solve local Riemann problems
- Average state variables
- Derive numerical fluxes from conservation laws



$$\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U} \left( \frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; \mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n \right) dx - (x_{i+1/2} - x_i) \mathbf{U}_i^n + \Delta t \left( \underline{\mathbf{F}_{i+1/2}} - \mathbf{F}_i^n \right) = 0$$

Depend on “quality” of approximate solutions!



# Approximate Riemann solver

---

## □ Standard approximate Riemann solver

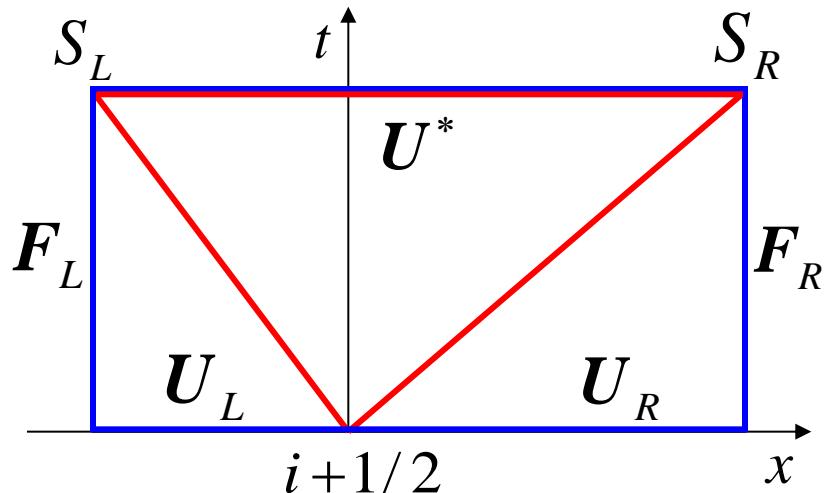
- Lax-Friedrichs scheme [Lax, 1950's]
- Godunov scheme [Godunov, 1959]
- Rusanov scheme [Rusanov, 1961]
- Roe scheme (HD) [Roe, 1981]
- HLL scheme [Harten+, 1983]
- Roe scheme (MHD) [Brio+, 1988]
- HLLC scheme (HD) [Toro+, 1994; Batten+, 1997]
- HLLC scheme (MHD) [Gurski, 2004; Li, 2005]
- HLLD scheme (MHD) [Miyoshi+, 2005]



# HLL approximate Riemann solver

- HLL Riemann solver [Harten+, 1983]

- Conservation laws
- 2-waves approximation



$S_{R,L}$ : max./min. speeds

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\oint (U dx - F dt) = 0 \Rightarrow (S_R - S_L)U^* - S_R U_R + S_L U_L + F_R - F_L = 0$$

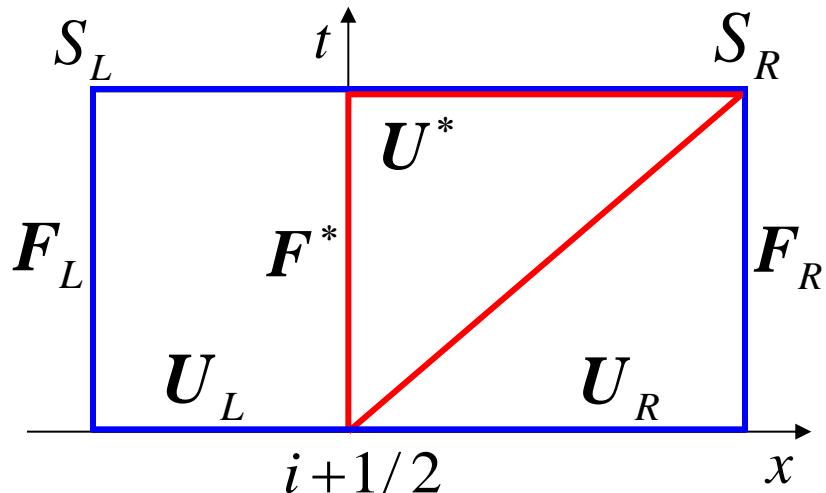
- CD/TD/RD cannot be resolved



# HLL approximate Riemann solver

- HLL Riemann solver [Harten+, 1983]

- Conservation laws
- 2-waves approximation



$S_{R,L}$ : max./min. speeds

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\oint (U dx - F dt) = 0 \Rightarrow S_R U^* - S_R U_R + F_R - F^* = 0$$

- CD/TD/RD cannot be resolved

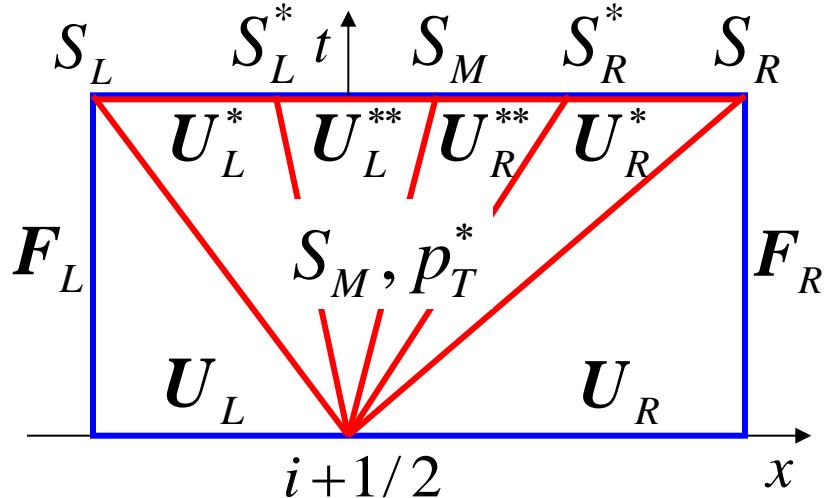


# HLLD approximate Riemann solver

## □ HLLD Riemann solver [Miyoshi+, 2005]

### ■ Conservation laws

### ■ 5-waves approximation



$S_{R,L}$ : fast magnetosonic wave

$S_M$  : entropy wave

$S_{R,L}^*$ : Alfvén wave

$$S_{R,L}(\mathbf{U}_{R,L}^* - \mathbf{U}_{R,L}) = \mathbf{F}_{R,L}^* - \mathbf{F}_{R,L}, \quad S_{R,L}^*(\mathbf{U}_{R,L}^{**} - \mathbf{U}_{R,L}^*) = \mathbf{F}_{R,L}^{**} - \mathbf{F}_{R,L}^*,$$

$$S_M(\mathbf{U}_R^{**} - \mathbf{U}_L^{**}) = \mathbf{F}_R^{**} - \mathbf{F}_L^{**}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} \mathbf{U}(x, t^{n+1}) dx + S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_R - \mathbf{F}_L = 0$$

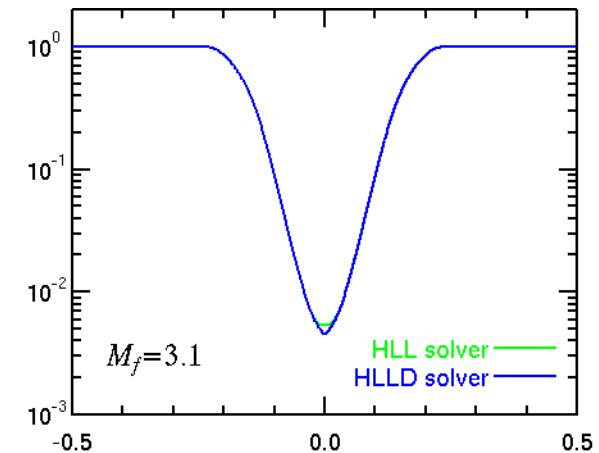
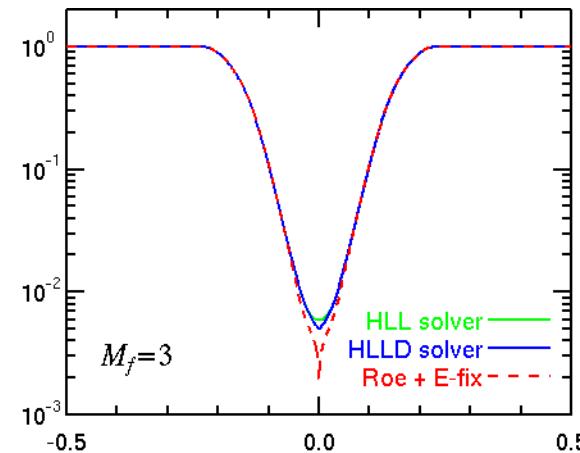
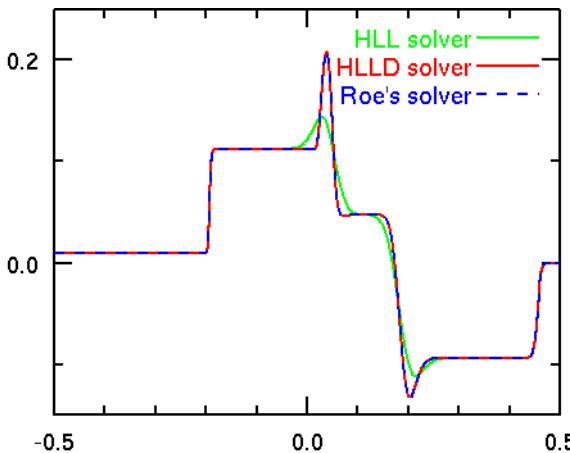


# HLLD approximate Riemann solver

## □ The HLLD Riemann solver

- is constructed without eigenvectors
- exactly resolves isolated CD/TD/RD/FS
- preserves density and pressure positivities

## □ High-efficiency! High-resolution! Robust!





# HLLD approximate Riemann solver

- Established as a standard Riemann solver
- Comparing numerical methods [Kritsuk+, 2011]

Table 2  
Solver Design Specifications for the Eulerian Methods<sup>a</sup>

Name	Base Scheme <sup>b</sup>	Spatial Order <sup>c</sup>	Source Terms <sup>d</sup>	MHD <sup>e</sup>	Time Integration <sup>f</sup>	Directional Splitting <sup>g</sup>
ENZO	FV, HLL	Second	Dedner	Dedner	Second-order RK	Direct
FLASH	FV, HLLD	Second	Derivative	Third-order CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
KT-MHD	FD, CWENO	Third	KT	Third-order CT	Fourth-order RK	Direct
LL-MHD	FV, HLLD	Second	None	Athena CT	Forward Euler	Split
PLUTO	FV, HLLD	Third	Powell	Powell	Fourth-order RK	Direct
PPML	FV, HLLD	Third	None	Athena CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
RAMSES	FV, HLLD	Second	None	2D HLLD CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
STAGGER	FD, Stagger	Sixth	Tensor	Staggered CT	Third-order Hyman	Direct
ZEUS	FD, van Leer	Second	von Neumann	MOC-CT	Forward Euler	Split

Notes.

<sup>a</sup> See Section 3 and the indicated sections on each topic for more information.

<sup>b</sup> Base method. FD for finite difference, FV for finite volume. FV techniques have the Riemann solver listed, Section 6.3.

<sup>c</sup> Spatial order of accuracy, Section 6.1.

<sup>d</sup> Artificial Viscosity, Section 6.2. “|| Derivative” indicates presence of terms proportional to the longitudinal derivative of the magnetic field.

<sup>e</sup> MHD method, Section 6.4.

<sup>f</sup> Time integration method, Section 6.6.3.

<sup>g</sup> Multidimensional technique, Section 6.6.2. “⊥ Reconstruction” indicates presence of transverse derivatives in the interface reconstruction.

- Athena (US), CANS+ (Japan), and many other researches

# Challenges

## Challenges to multi-D MHD scheme

### Comparing numerical methods [Kritsuk+, 2011]

Table 2  
Solver Design Specifications for the Eulerian Methods<sup>a</sup>

Name	Base Scheme <sup>b</sup>	Spatial Order <sup>c</sup>	Source Terms <sup>d</sup>	MHD <sup>e</sup>	Time Integration <sup>f</sup>	Directional Splitting <sup>g</sup>
ENZO	FV, HLL	Second	Dedner	Dedner	Second-order RK	Direct
FLASH	FV, HLLD	Second	Derivative	Third-order CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
KT-MHD	FD, CWENO	Third	KT	Third-order CT	Fourth-order RK	Direct
LL-MHD	FV, HLLD	Second	None	Athena CT	Forward Euler	Split
PLUTO	FV, HLLD	Third	Powell	Powell	Fourth-order RK	Direct
PPML	FV, HLLD	Third	None	Athena CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
RAMSES	FV, HLLD	Second	None	2D HLLD CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
STAGGER	FD, Stagger	Sixth	Tensor	Staggered CT	Third-order Hyman	Direct
ZEUS	FD, van Leer	Second	von Neumann	MOC-CT	Forward Euler	Split

#### Notes.

<sup>a</sup> See Section 3 and the indicated sections on each topic for more information.

<sup>b</sup> Base method. FD for finite difference, FV for finite volume. FV techniques have the Riemann solver listed, Section 6.3.

<sup>c</sup> Spatial order of accuracy, Section 6.1.

<sup>d</sup> Artificial Viscosity, Section 6.2. “|| Derivative” indicates presence of terms proportional to the longitudinal derivative of the magnetic field.

<sup>e</sup> MHD method, Section 6.4.

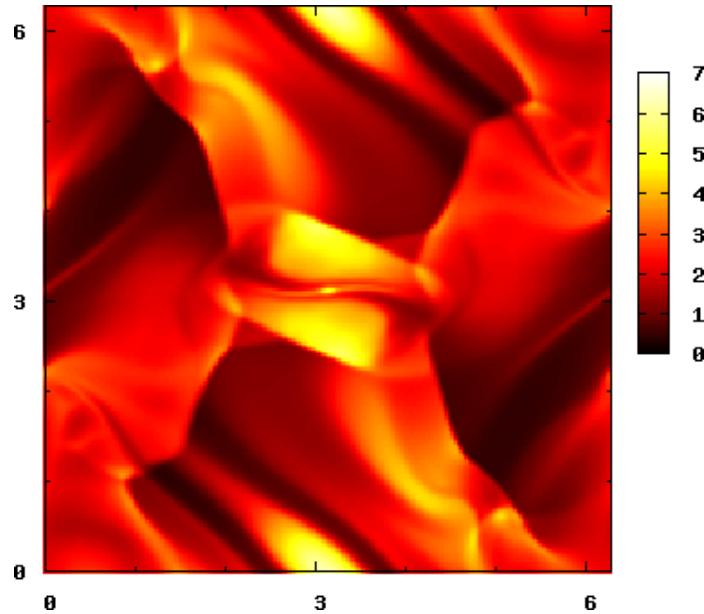
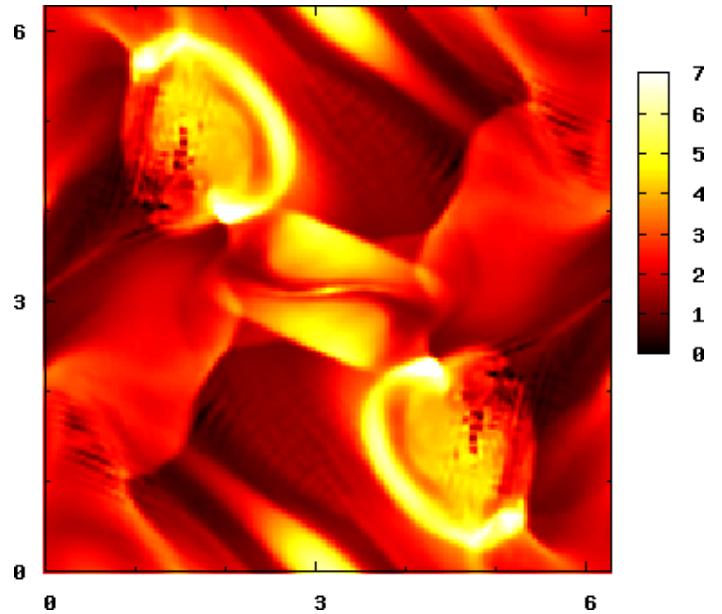
<sup>f</sup> Time integration method, Section 6.6.3.

<sup>g</sup> Multidimensional technique, Section 6.6.2. “⊥ Reconstruction” indicates presence of transverse derivatives in the interface reconstruction.



# Challenges to multi-D

- Treatment of numerical magnetic monopole



- Negative effect due to unphysical magnetic force  
$$-\nabla \cdot (\mathbf{B}^2/2\mathbf{I} - \mathbf{B}\mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B})$$
- Need divergence-free/divergence-cleaning method!

# Challenges to multi-D

## Treatment of numerical magnetic monopole



実験技術

# 数値シミュレーションは $\nabla \cdot B = 0$ を守れるか?

三好 隆博

広島大学大学院理学研究科

# Can numerical simulation preserve $\nabla \cdot B = 0$ ?

拘束条件を内在する数値シミュレーション流体力学(MHD)方程式を具体例に試みよう。

MHDは核融合:

ラズマなどのマグネットオーバーにおいては必ず理論モデルである。MHDでは、流体(ラズマ)の圧力に加え、磁気的な力であるオーレンツ力によって流体が変形する。一方で磁場は流体の運動に応じて変動する。磁場と流体の相互作用によって、通常の流体と類似の音波(速い磁気音波、遅い磁気音波)のみならず、アルヴェン波と称される磁力線を伝る横波が存在可能となる。特に宇宙空間や天体周辺環境においては、ラズマはしばしば局所的に波よりも大きい速度を獲得し得るため、これらの波に巣わる多彩な衝撲波構造が普遍的に観測・予測される。

衝撲波などの不連続解を非物理的な運動なく正しく数値的に解くには、数値解法と支配方程式の数学的特徴を適切に考慮する必要がある。双曲型方程式に対する特性曲線理論に基づく数値解法、いわゆる衝撲波吸収法は、長年にわたり数値流体力学分野における重要な研究開発課題であった。MHDに対しても、衝撲波吸収法に関する知見が近年急速に深まつてあり、基礎研究、応用研究が活発に進められている。衝撲波吸収法では、必要なところにのみ、必要な分数的粘性によって不連続解を正確に解くことができる一方で、特にMHDでは、衝撲波吸収法の多次元化において重大な問題が生じることになる。磁場に関するガウスの法則、 $\nabla \cdot B = 0$  の破綻である。数値

における数値的磁気单極子の影響とその処方箋を示す。ここでは特に、数値的磁気单極子の影響を取り除くための数値シミュレーション技法を3つのアプローチに分け、具体的に紹介する。3つのアプローチとは、  
 1. 連立方程式对付り加えて解く、  
 2. 誘導方程式对付り離散化する、  
 3. 磁気单極子の時間発展を追う、  
 である。第1のアプローチでは、時間発展の数値シミュレーションに加え、ガウスの法則に関する連立1次方程式を解いて磁場を補正する。第2のアプローチでは、離散的なガウスの法則を満足するよう、誘導方程式に対してのみ特別な離散化を行う。第3のアプローチでは、数値的磁気单極子の存在を潔く認め、数値的磁気单極子の時間発展方程式を考える。それぞれに一長一短があり、未だ定番ではなく、研究開発途上の技術と言える。

本稿で示す拘束条件を守るために3つのアプローチが、拘束条件を内在する時間発展方程式の多くに対して、数値シミュレーションを実現するための有効な指針になれば幸いである。

近似される、慣性項を落とした電気流体方程式オームの法則となっており、(1)電場は零、(2)電荷密度は零、(3)電場は零、電場とマグネティカルク方程式との連立式である。式(1)は本文で式(1)と呼ばれれば、Eを零とするとから消え去ができる。このための電場(電場)流体力学でなく(電場)流体力学と呼ばれることが多い。

(シア)アルヴェン波:  
 指定されたラプラスの場で、振幅が時間とともに指数関数的に増加する波である。この波は電場と電荷密度がなければ存在しない。アルヴェン波の名前は「for fundamental work and discoveries in magnetohydrodynamics with practical applications in different parts of plasma physics」という意味について1970年にノーベル物理学賞を受賞している。

**衝撲波:**  
 放射状の衝撲波によって伝播速度が異なるようすが非接続波衝撲波である。衝撲波と次の波とのうちどちらか、やがてどちらの波にも衝撲波が遭遇するときに見られる衝撲波が形成される。衝撲波内では衝撲波が交差するからかうとうまく重なる因子があらる。複数の衝撲波が干渉するMHDでは、しかも多次元だと、本文で示すのと異常に複雑な現象が発生することになる。

# Can numerical simulations preserve $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ?

拘束条件を内在する数値シミュレーション  
磁気流体力学(MHD)方程式を具体例に試みよう。

三好 隆博

## — 実験技術

数値シミュレーションは  $\nabla \cdot B = 0$  を守れるか？

拘束条件を内在する数値シミュレーション  
磁気流体力学(MHD)方程式を具体例に試みよう。

MHD は核融合炉や等離子体などのマクロスケールの現象を記述する理論モデルである。等離子体 (プラズマ) の圧力に比例するランダムな運動エネルギーと、等離子体の電荷による静電場による運動エネルギーの和が、等離子体の運動エネルギーである。

衝撃波などの不連続解を非物理的な振動なく正しく数値的に解くには、数値解法として支配方程式の数学的特性を適切に考慮する必要がある。双曲型方程式に対する特異性線理論に基づき数値解法。いわゆる衝撃波捕捉法は、長年にわたり数値流体力学分野における重要な研究開発課題であった。MHDに対しても、衝撃波捕捉法に関する知識が近年急速に深まりつつあり、基礎研究、応用研究が飛躍的に進められている。衝撃波捕捉法では、必要なところのみ、必要な部分だけ数値的粘性が自動的に与えられる。この数値的粘性によって不連続解を正確に解くことができる一方で、特にMHDでは、衝撃波捕捉法の高次元化において重大な問題が生じることになる。磁場に関するガウスの法则、 $\nabla \cdot B = 0$  のように、数値

における数値的磁気单極子の影響とその処理を示す。ここでは特に、数値的磁気单極子の影響を取り除くための数値シミュレーション技術を3つのアプローチに分けて、具体的に紹介する。3つのアプローチとは、  
 1. 運立方程式を付け加えて解く、  
 2. 誘導方程式を特別に離散化する、  
 3. 磁気单極子の時間発展を追う。  
 ある。第1のアプローチでは、時間発展を数値シミュレーションに加え、ガウスの法則に関する連立1次方程式を解いて磁場を補正する。第2のアプローチでは、離散化されたガウスの法則を満足するよう、誘導方程式に対してのみ特別な離散化を行う。第3のアプローチでは、数値的磁気单極子の存在を撇く認め、数値的磁気单極子の時間発展方程式を考える。それそれに一長一短があり、未だ決定版ではなく、研究開発途上であると言える。

本稿で示す拘束条件を守るための3つのアプローチが、拘束条件を内在する時間発展方程式の多くに対して、数値シミュレーションを実現するための有効な指針になれることを願う（幸い）である。

近似される。慣性項を落とした電子流体方程式がオームの法則となっており(本文中式(3)), 電場 $E$ は運動的に決まられる。ただし、電場 $E$ をマクスウェル方程式の誘導方程式(本文中式(1))に代入すれば、 $E$ を方程式系から消すことができる。このため、「電磁」流体力学ではなく「磁気」流体力学と呼ばれることが多い。

(シア) アルヴェン波：  
磁化されたプラズマで、磁  
力線張力と慣性力が振動を作  
り、磁力線方向に伝播する横波。  
この磁気流体説に名前が付いて  
いるハンス・アルヴェンは、  
“fundamental work and  
discoveries in magnetohydro-  
dynamics with fruitful applica-  
tions in different parts of plasma  
physics”という業績によって  
1970年にノーベル物理学賞  
を受賞している。

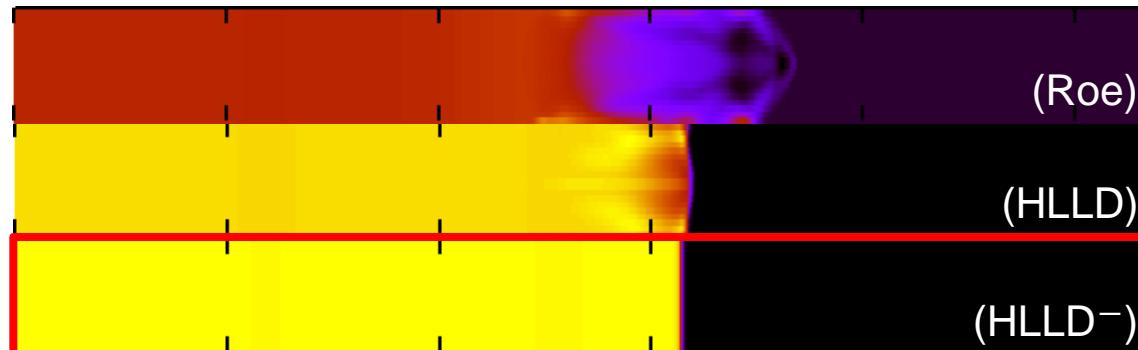
**衝撃波：**波の振幅によって伝播速度が異なるようすが非線形波動では、時間と共に波の突っ立ちが起こり、やがて自消的には物理量が不連続的に変化するようすを見る衝撃波が形成される。時空間内で特性曲線が交差するかどうかが重要な因子である。複数の波のランブルが存在するMHDで、しかも多次元だと、本文中で示されるOrszag-Tang波のように非常に複雑な現象が起こることになる。



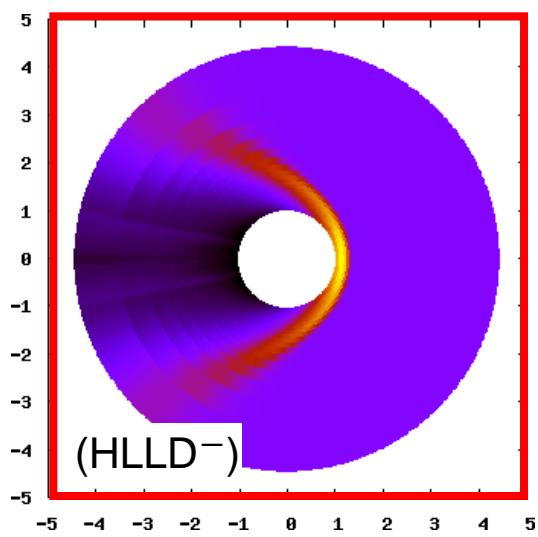
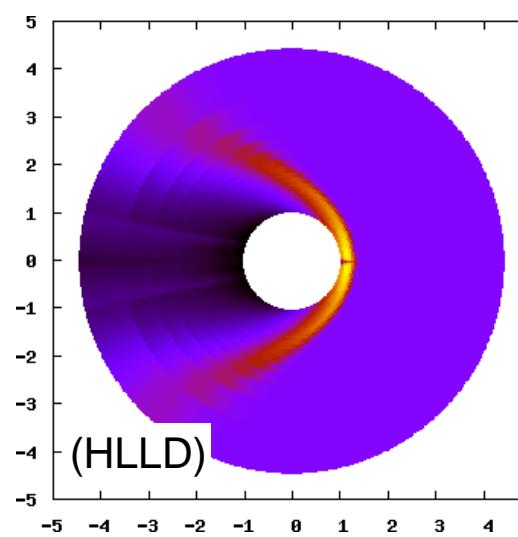
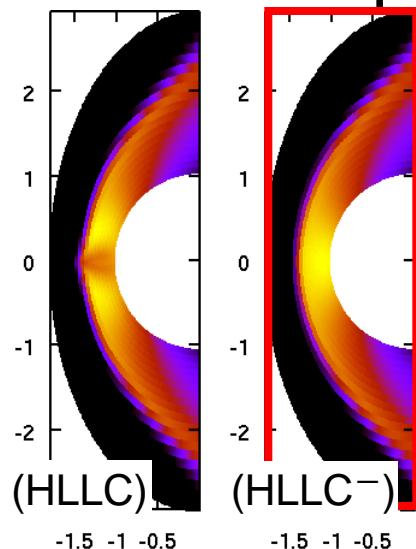
# Challenges to multi-D

## □ Numerical shock instabilities

### ■ Odd-even decoupling



### ■ Carbuncle phenomena



# Challenges

## □ Challenges to higher-order MHD scheme

### ■ Comparing numerical methods [Kritsuk+, 2011]

Table 2  
Solver Design Specifications for the Eulerian Methods<sup>a</sup>

Name	Base Scheme <sup>b</sup>	Spatial Order <sup>c</sup>	Source Terms <sup>d</sup>	MHD <sup>e</sup>	Time Integration <sup>f</sup>	Directional Splitting <sup>g</sup>
ENZO	FV, HLL	Second	Dedner	Dedner	Second-order RK	Direct
FLASH	FV, HLLD	Second	Derivative	Third-order CT	Forward Euler	$\perp$ Reconstruction
KT-MHD	FD, CWENO	Third	KT	Third-order CT	Fourth-order RK	Direct
LL-MHD	FV, HLLD	Second	None	Athena CT	Forward Euler	Split
PLUTO	FV, HLLD	Third	Powell	Powell	Fourth-order RK	Direct
PPML	FV, HLLD	Third	None	Athena CT	Forward Euler	$\perp$ Reconstruction
RAMSES	FV, HLLD	Second	None	2D HLLD CT	Forward Euler	$\perp$ Reconstruction
STAGGER	FD, Stagger	Sixth	Tensor	Staggered CT	Third-order Hyman	Direct
ZEUS	FD, van Leer	Second	von Neumann	MOC-CT	Forward Euler	Split

#### Notes.

<sup>a</sup> See Section 3 and the indicated sections on each topic for more information.

<sup>b</sup> Base method. FD for finite difference, FV for finite volume. FV techniques have the Riemann solver listed, Section 6.3.

<sup>c</sup> Spatial order of accuracy, Section 6.1.

<sup>d</sup> Artificial Viscosity, Section 6.2. “|| Derivative” indicates presence of terms proportional to the longitudinal derivative of the magnetic field.

<sup>e</sup> MHD method, Section 6.4.

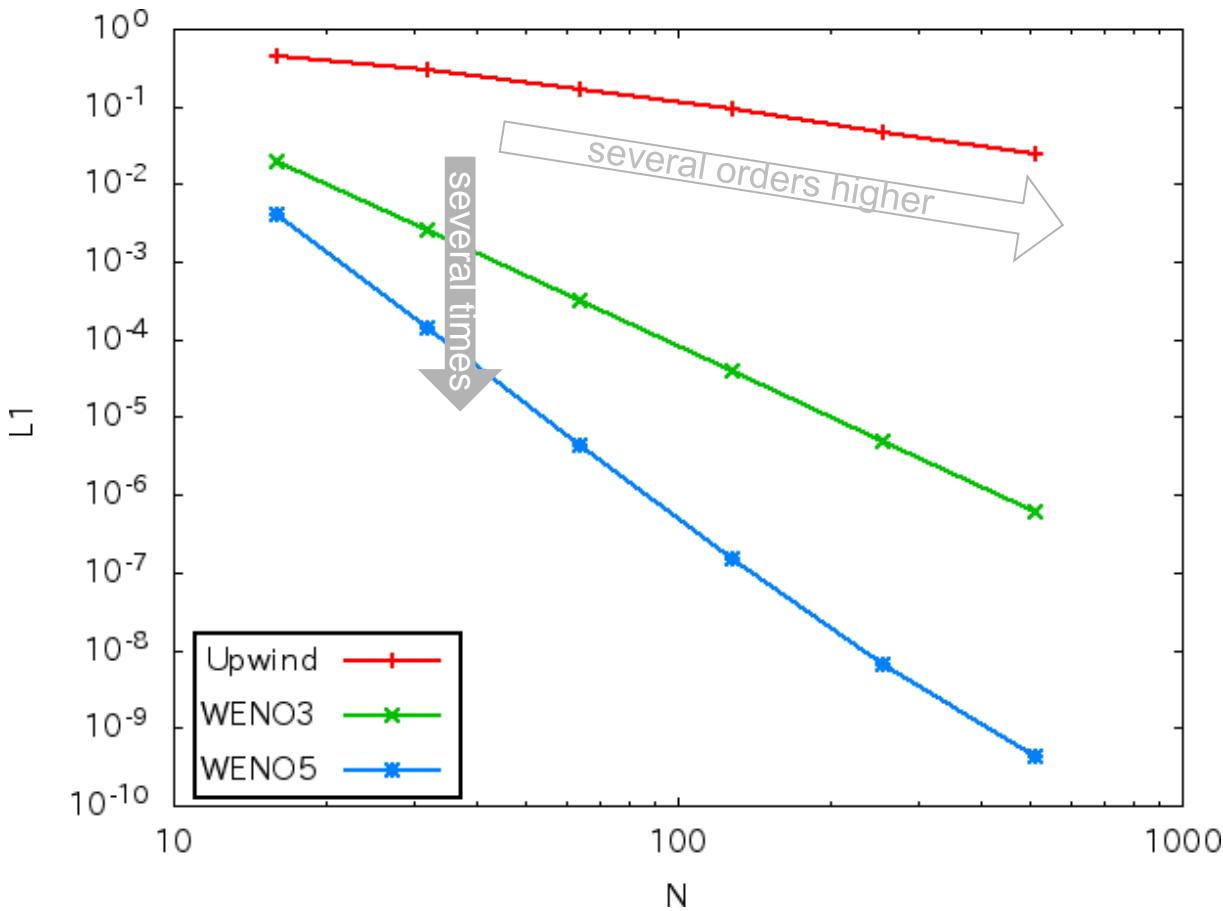
<sup>f</sup> Time integration method, Section 6.6.3.

<sup>g</sup> Multidimensional technique, Section 6.6.2. “ $\perp$  Reconstruction” indicates presence of transverse derivatives in the interface reconstruction.



# Challenges to higher-order

- Importance of higher-order methods
  - Error of  $n$ th-order method vs. Computational cost



$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$u(x, t=0) = \sin(2\pi x)$$

$$L_1 \equiv \frac{1}{N} \sum_i |u_i - u(x_i, t)|$$



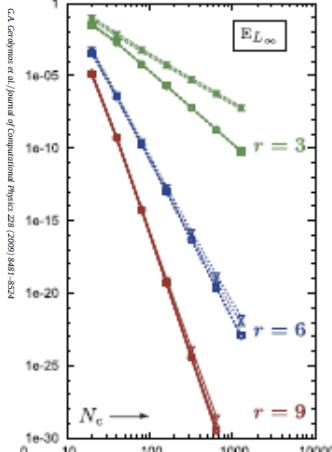
# Challenges to higher-order

## □ Godunov's theorem

- Any *linear* monotone scheme (non-oscillatory scheme) can be at most first-order accurate
- This statement suggests that higher-order non-oscillatory scheme can be constructed as a nonlinear scheme
  - TVD, MUSCL, PPM, WENO, etc.

**Table 6**  
Coefficients  $\sigma_{r,k_1,m}$  appearing in the definition of the smoothness indicators  $\beta_{r,k_1+1}$  (16) for the weno7 ( $r = 9$ ) reconstruction.

$\ell$	$m$	$k_1 = 0$	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$k_1 = 5$	$k_1 = 6$	$k_1 = 7$	$k_1 = 8$	
8	8	17.68327251203	3.45355312931	0.924208107483	0.221148486496	0.05221148486496	0.013205120120	0.003205120120	0.000805120120	0.0000205120120	5.094711703372090
7	8	100.993372307952	-33.993372307951	-1.098441378687	-0.246423311952	-0.059051310000	-0.0144119844343	-0.00389125454879	-0.00095036442001	-0.0000245036442001	100.993372307952
6	8	2.30717405300000	0.50000000000000	0.12000000000000	0.03000000000000	0.00800000000000	0.00200000000000	0.00050000000000	0.00012500000000	0.00003125000000	2.30717405300000
5	8	0.10070743648313	0.02007436483133	0.00500743648313	0.00120074364831	0.00030074364831	0.00008007436483	0.00002000743648	0.00000500743648	0.0000012500743648	0.10070743648313
4	8	1.121058785055	0.25000000000000	0.06250000000000	0.01562500000000	0.00390625000000	0.00100000000000	0.00025000000000	0.00006250000000	0.00001562500000	1.121058785055
3	8	24.01179382750000	4.331737467079341	0.7272354002723	0.145272354002723	0.0360272354002723	0.0090272354002723	0.002250272354002723	0.0005625027235400273	0.000140625027235400273	24.01179382750000
2	8	1.32074742900000	0.32000000000000	0.08000000000000	0.02000000000000	0.00500000000000	0.00125000000000	0.00031250000000	0.00007812500000	0.00001953125000	1.32074742900000
1	8	-4.80000000000000	-1.20000000000000	-0.30000000000000	-0.08000000000000	-0.02000000000000	-0.00500000000000	-0.00125000000000	-0.00031250000000	-0.00007812500000	-4.80000000000000
0	8	129.739394640669	30.239000000000	7.562500000000	1.890625000000	0.472500000000	0.123125000000	0.031531250000	0.008881250000	0.002220312500	129.739394640669
7	7	20.67324081545033	5.01825000000000	1.25000000000000	0.30000000000000	0.08000000000000	0.02000000000000	0.00500000000000	0.00125000000000	0.00031250000000	20.67324081545033
6	7	23.99419573340063	5.87500000000000	1.46456566000000	0.36000000000000	0.09000000000000	0.02250000000000	0.00600000000000	0.00150000000000	0.00037500000000	23.99419573340063
5	7	28.00173400000000	7.32000000000000	1.73000000000000	0.48000000000000	0.12000000000000	0.03000000000000	0.00800000000000	0.00200000000000	0.00050000000000	28.00173400000000
4	7	-1.496173743450303	-0.368173743450303	-0.09201737434503	-0.02301737434503	-0.00601737434503	-0.00150173743450	-0.0003750173743450	-0.000093750173743450	-0.00002343750173743450	-1.496173743450303
3	7	107.88739846524143	28.19936148792368	7.00000000000000	1.75000000000000	0.43750000000000	0.11187500000000	0.03046875000000	0.00811750000000	0.00202875000000	107.88739846524143
2	7	-39.25000000000000	-9.75000000000000	-2.43750000000000	-0.61875000000000	-0.15468750000000	-0.03868750000000	-0.01016875000000	-0.0025416875000000	-0.000635416875000000	-39.25000000000000
1	7	-3.86500000000000	-0.96250000000000	-0.24062500000000	-0.06015625000000	-0.01503906250000	-0.00375906250000	-0.00093906250000	-0.00023490625000000	-0.0000637490625000000	-3.86500000000000
0	7	4.57218000000000	1.18000000000000	0.47500000000000	0.12375000000000	0.03187500000000	0.00846875000000	0.00211875000000	0.0005291875000000	0.000132291875000000	4.57218000000000
6	6	1.994192741027311	352.812367184713	74.7303217533	24.124000000000	6.030000000000	1.501000000000	0.375000000000	0.093750000000	0.023437500000	1.994192741027311
5	6	-23.993195462557003	-4.234625620500000	-1.00932730844641	-0.25923230797367	-0.06703935000000	-0.01679230000000	-0.00417230000000	-0.0010437230000000	-0.000260937230000000	-23.993195462557003
4	6	46.70245000000000	10.40700000000000	2.61670000000000	0.65417000000000	0.16354170000000	0.04085417000000	0.01021700000000	0.0025541700000000	0.000638541700000000	46.70245000000000
3	6	-29.37110741247841	-7.579344000000000	-1.88700000000000	-0.47100000000000	-0.12270000000000	-0.03067000000000	-0.00816700000000	-0.0020416700000000	-0.000510416700000000	-29.37110741247841
2	6	33.008527721216000	8.944325100000000	2.11130000000000	0.53340000000000	0.13340000000000	0.03340000000000	0.00834000000000	0.0020834000000000	0.000520834000000000	33.008527721216000
1	6	-37.33110741247841	-9.496331783000000	-2.11830000000000	-0.53340000000000	-0.13340000000000	-0.03340000000000	-0.00834000000000	-0.0020834000000000	-0.000520834000000000	-37.33110741247841
0	6	4.57218000000000	1.18000000000000	0.47500000000000	0.12375000000000	0.03187500000000	0.00846875000000	0.00211875000000	0.0005291875000000	0.000132291875000000	4.57218000000000



Very-high-order WENO  
(up to 17th-order)  
[Gerolymos+, 2009]



# Challenges

---

- *Multi-dimensional higher-order divergence-free* scheme is one of the goals of shock capturing scheme for MHD



# Summary

---

- I have reported current status and challenges of robust shock capturing schemes for MHD
  - The HLLD has been established as a standard MHD solver in the field of astrophysics
  - Multi-D shock capturing scheme for MHD is one of the challenges
    - Treatment of numerical magnetic monopole
    - Treatment of numerical shock instabilities
  - Higher-order shock capturing scheme for MHD is one of the challenges
  - Study on shock capturing scheme for two-fluid / extended MHD is now progressing...