

第10回若手科学者によるプラズマ研究会

# 高速トロイダル流平衡におけるHall効果

東大新領域 白石淳也, 古川勝

# 1. はじめに

## Hall効果とは

Hall効果 = 磁場を横切る電流の効果

高温プラズマでは, イオンの慣性効果による「無衝突Hall効果」が重要となる.

## Hall効果による特異摂動

特異摂動 =  $\varepsilon$ (微小係数)  $\times$  高階微分

( $\varepsilon$ が小さくても, 高階微分が効く可能性がある. ちなみに大型トカマクで $\varepsilon \sim 0.01$ )

- トロイダル回転をもつ平衡の多様化

[J. Shiraishi, M. Furukawa and Z. Yoshida, Plasma Fusion Res. 1, 050 (2006).]

- 理想MHDのもつAlfven特異点を解消

[J. Shiraishi, S. Ohsaki and Z. Yoshida, Phys. Plasmas 12, 092305 (2005).]

- Alfven波の分散関係  $\rightarrow$  位相速度の異なる円偏波

- 線形安定性において, 磁場と流れ場のトポロジカルな関係が重要

[S.A. Balbus and C. Terquem, Astrophys. J. 552, 235 (2001).]

- 圧縮性と結合し, Alfven波の連続スペクトルを点スペクトルにする.

[S. Ohsaki and S.M. Mahajan, Phys. Plasmas 11, 898 (2004).]

# トロイダル回転をもつ平衡

核融合プラズマはもちろん、宇宙・天体現象においても重要。  
RT-1 (Ring Trap-1) 装置(磁気浮上内部導体系)でも、  
トロイダル回転の駆動が計画されている。

Note : 双曲性や特異性といった数学的困難は存在しない。

## 本研究では....

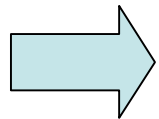
Hall効果および回転を含む平衡をトロイダル系で解析。

c.f.)

円柱系 [Shiraishi, Ohsaki and Yoshida, PoP 12, 092305 (2005).]

[Mahajan and Yoshida, PRL 81, 4863 (1998).]

スラブ [Mahajan and Yoshida, PoP 7, 635 (2000).]



Hall効果, 回転効果, トロイダル効果の共存により,  
理想MHDに比べて, 多様な平衡構造が形成される。  
特徴的な2つの平衡を調べると, その性質は大きく異なる。

2つのクラスの平衡を数値解析し, 回転が平衡配位に及ぼす影響について調べる。  
(RT-1を模擬した系での計算)

## 2. トロイダル回転を含む理想MHD平衡

### 理想Ohm則の積分

$$\text{Clebsch表現} \begin{cases} \mathbf{B}(R, Z) = \nabla\psi(R, Z) \times \nabla\phi + RB_\phi(R, Z)\nabla\phi \\ \mathbf{V}(R, Z) = RV_\phi(R, Z)\nabla\phi \end{cases}$$

$$\text{および } \mathbf{E}(R, Z) = -\nabla\varphi_s(R, Z)$$

を用いると,  $\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0$  は,

$$-\nabla\varphi_s + \frac{V_\phi}{R}\nabla\psi = 0$$

これより, Cauchyデータ

$$\varphi_s = \varphi_s(\psi)$$

および, 回転分布

$$V_\phi = R\varphi'_s$$

を得る. (プライムは $\psi$ に関する微分.)

Note 1) 各磁気面上で剛体回転(Ferraro's isorotation law).

2) 回転角周波数は $\psi$ の任意関数

# 運動方程式の積分

$n(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p$  は,

$$-\frac{nV_\phi^2}{R} \nabla R = -\frac{\Delta^* \psi}{R^2} \nabla \psi + \{\psi, RB_\phi\} \nabla \phi - \frac{B_\phi}{R} \nabla (RB_\phi) - \nabla p$$

ただし,  $\begin{cases} \Delta^* u = R^2 \nabla \cdot (R^{-2} \nabla u) & : \text{Grad-Shafranov作用素} \\ \{u, v\} = -\nabla \phi \cdot (\nabla u \times \nabla v) & : \text{Poisson括弧} \end{cases}$

トロイダル効果がないと, いわゆるGrad-Shafranov方程式になる.

トロイダル成分より, Cauchyデータを得る.

$$RB_\phi = I(\psi)$$

運動方程式は,

$$-\frac{nV_\phi^2}{R} \nabla R = -\frac{\Delta^* \psi}{R^2} \nabla \psi - \frac{II'}{R^2} \nabla \psi - \nabla p$$

Note : 等圧面と磁気面がずれうる.  $p(R, Z) = p(\psi(R, Z), R)$

# 状態方程式 & 一般化されたGrad-Shafranov方程式

磁力線方向の熱伝導係数は十分大きいとって、

$p(\psi, R) = n(\psi, R)T(\psi)$  を仮定すると、

$$\begin{cases} T\partial_R n = nR\omega^2 \\ -\Delta^* \psi = II' + R^2 \partial_\psi p \end{cases}$$

1つめの微分方程式は直ちに積分できて

$$n(\psi, R) = n_0(\psi) \exp(R^2 \omega^2 / 2T)$$

2つめの微分方程式が一般化されたGrad-Shafranov方程式

Note: 1) 密度分布は $\omega$ の符号によらない.  
2)  $\varphi$ に関する対称性

### 3. Hall効果による平衡の多様化

運動方程式は変わらず

$$\left\{ \begin{array}{l} RB_\phi = I(\psi) \\ -\frac{nV_\phi^2}{R}\nabla R = -\frac{\Delta^*\psi}{R^2}\nabla\psi - \frac{II'}{R^2}\nabla\psi - \nabla p \end{array} \right.$$

一般化Ohm則 (電子流体はbarotropicと仮定)

$$-\nabla\varphi_s^* + \left( \mathbf{V} - \frac{\varepsilon}{n}\nabla \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} = 0$$

Hall効果は単に1つの付加項. しかし, この特異摂動により多様な平衡構造がうまれる.

$$\frac{\varepsilon}{n}\Delta^*\psi + \frac{\varepsilon}{n}II' + RV_\phi = R^2\omega(\psi) \equiv R^2\varphi_s^{* \prime}$$

Note:  $\varepsilon = 0 \rightarrow V_\phi = R\omega(\psi) \sim$  剛体回転

# イオン流体の運動方程式の積分

以上より、イオン流体の運動方程式を得る.

$$\underline{-\frac{\varepsilon n V_\phi^2}{R} \nabla R} = \frac{n V_\phi}{R} \nabla \psi - n \omega \nabla \psi - \varepsilon \nabla p \quad \dots(\star)$$

**流れ, Hallおよびトロイダル効果の結合**

仮定:  $p(\psi, R) = n(\psi, R)T(\psi)$   $V_\phi = R^\alpha f(\psi)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial R} = R^{2\alpha-1} \frac{f^2}{T} \\ \varepsilon \left( T \frac{\partial n}{\partial \psi} + n T' \right) = n R^{\alpha-1} f - n \omega \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(\psi, R) = n_0(\psi) \exp \left( \frac{f^2}{2\alpha T} R^{2\alpha} \right) \\ \omega(\psi) + \varepsilon T(\psi) \frac{n'_0}{n_0} + \varepsilon T' + f(\psi) \left[ \frac{\varepsilon}{2\alpha} R^{2\alpha} \left( 2f' - f \frac{T'}{T} \right) - R^{\alpha-1} \right] = 0 \end{cases}$$

**$\alpha = 1$  の平衡と  $\alpha = -1$  の平衡に分岐が起きる.**



## 理想MHDを満たす平衡( $\alpha=1$ )

トロイダル回転  $V_\phi = R \times C_1 \sqrt{T(\psi)}$

密度分布  $n(\psi, R) = n_0(\psi) \exp(C_1^2 R^2 / 2)$

遠心力の  
効果

一般化されたGS方程式  $-\Delta^* \psi = II' + R^2 (n_0' T + n_0 T') \exp(C_1^2 R^2 / 2)$

基礎方程式で $\varepsilon=0$ としたMHD平衡を満たす. Hall効果はキャンセルされる

## Hall-MHD固有の平衡( $\alpha=-1$ )

トロイダル回転  $V_\phi = \frac{\sqrt{T(\psi)}}{R} \left[ C_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{T(\psi')}} \right]$

密度分布  $n(\psi, R) = n_0(\psi) \exp \left\{ -\frac{1}{2R^2} \left[ C_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{T(\psi')}} \right]^2 \right\}$

1)  $\phi$ 対称性が壊れる.  
2) 理想MHD平衡の分布  
と大きく異なる.

一般化されたGS方程式  $-\Delta^* \psi = II' + \left\{ \frac{n_0(\psi) \sqrt{T(\psi)}}{\varepsilon} \left[ C_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{T(\psi')}} \right] + R^2 (n_0' T + n_0 T') \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2R^2} \left[ C_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{T(\psi')}} \right]^2 \right\}$

Hall, 流れ, トロイダル効果の共存により現れる平衡. MHD平衡と大きく特性が異なる.

Thyagaraja and McClement (2006)により, (★)の完全解が求められている.

## A. Thyagaraja and K.G. McClements, Phys. Plasmas 13, 062502 (2006).

Equation for general flow

$$\begin{cases} T \partial_R n = n V_\phi^2 / R, \\ \varepsilon T \partial_\psi n = n V_\phi / R - n \omega - \varepsilon n T' \end{cases}$$

Integration with respect to R

$$n(\psi, R) = n_0(\psi) \exp \left[ \frac{1}{T(\psi)} \int_{R_0}^R \frac{V_\phi^2(\psi, R')}{R'} dR' \right] \quad [n_0(\psi) = n(\psi, R_0)]$$

Equation for V

$$\omega(\psi) + \varepsilon T(\psi) \frac{n'_0}{n_0(\psi)} + \varepsilon T' = \frac{V_\phi}{R} - \varepsilon T \int_{R_0}^R \frac{1}{R'} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \frac{V_\phi^2(\psi, R')}{T(\psi)} \right] dR'$$

Differentiating with respect to R

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{V_\phi}{R} \right) = \frac{\varepsilon T}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{V_\phi^2}{T} \right)$$

Complete solution

$$V_\phi = \frac{R}{\varepsilon R^2 + d} \sqrt{T(\psi)} \left[ c - \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi'}{\sqrt{T(\psi')}} \right]$$

Ideal MHD	$c = d, d \gg 1$
Hall MHD	$c = \varepsilon C, d = 0$

# 4. 数値解析 – RT-1装置への応用

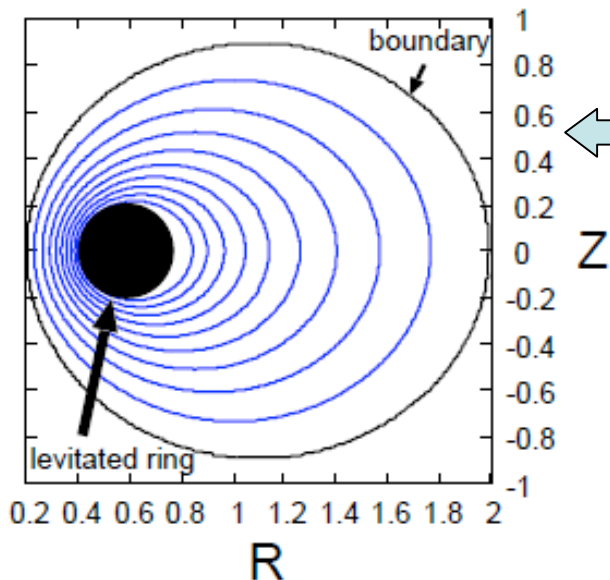
## 問題設定

各一般化GS方程式を境界値問題として解き、実験装置RT-1に応用

$$\text{磁気面関数 } I(\psi) = \alpha_I \psi^2, \quad T(\psi) = \alpha_T \psi^2, \quad n_0(\psi) = \alpha_n \psi^2$$

ダイポール磁場, 中心で  $T=1\text{keV}$ ,  $n_0=10^{18}\text{m}^{-3}$

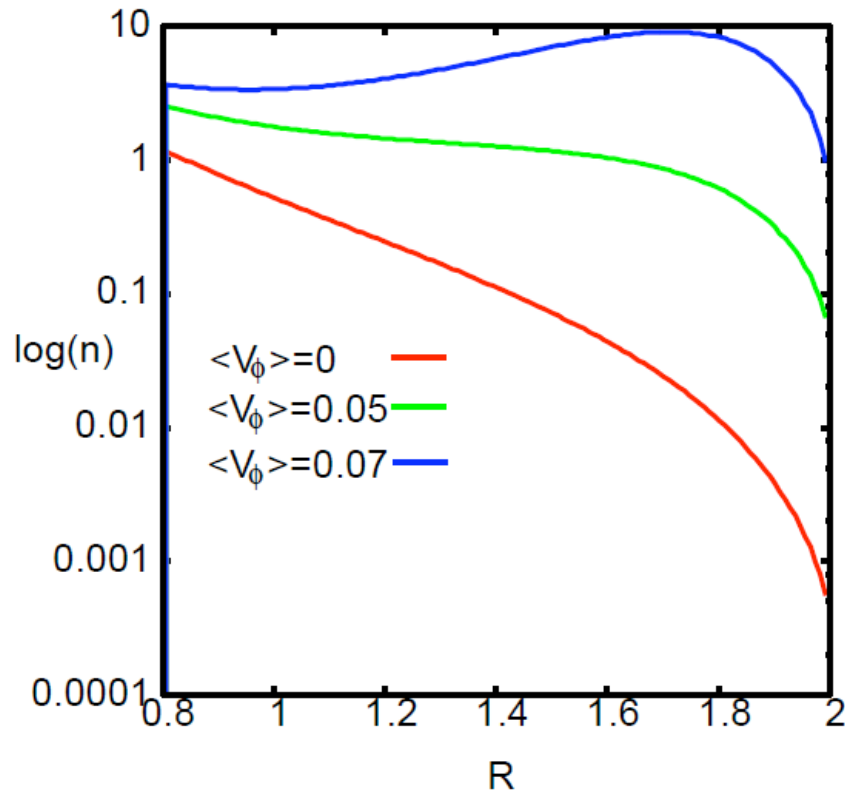
パラメータ	値	注意
スケール長 $L_0$	0.5m	プラズマ小半径
代表密度 $n_0$	$8.4 \times 10^{17}\text{m}^{-3}$	カットオフ密度
代表磁場 $B_0$	0.1T	浮上コイル近くの $B$
Alfvén 速度 $V_A$	$2.38 \times 10^6\text{m/s}$	$n_0$ 及び $B_0$ より
(2×) 磁気圧力 $B_0^2/\mu_0$	$7.96 \times 10^3\text{J/m}^3$	$B_0$ より
イオンスキン長 $\delta_i$	0.248m	$n_0$ より
ホールパラメータ $\varepsilon$	0.496	$L_0$ 及び $\delta_i$ より



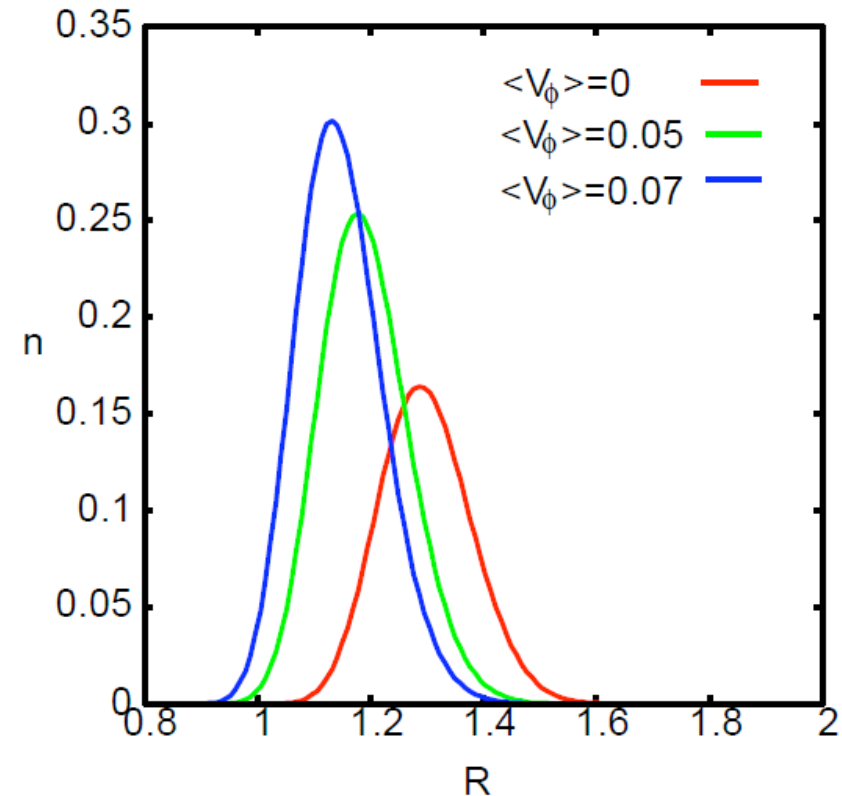
本研究でのパラメータで得られる  
典型的な磁気面形状

本研究では,  $\langle V_\phi \rangle$   
を変えて解の振舞を解析する.  
 $\langle \cdot \rangle$ は体積平均

## 2つの平衡における密度分布の振る舞い (リングの外側)



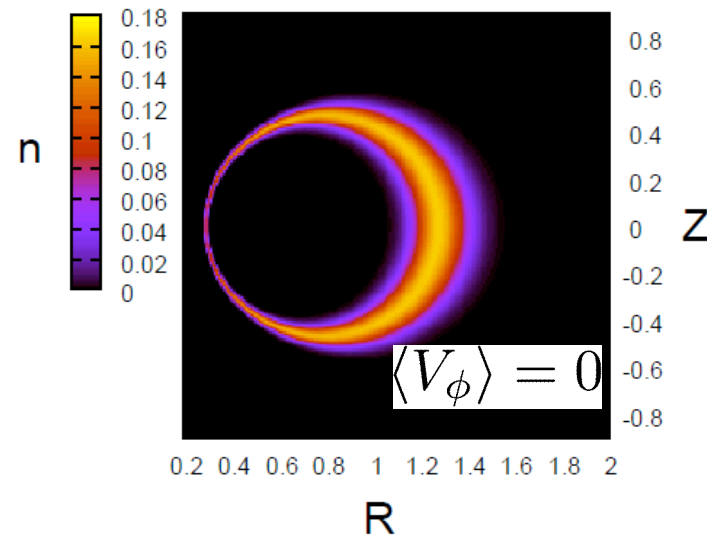
MHD平衡の密度分布の振る舞い



Hall-MHD平衡の密度分布の振る舞い

平均回転速度を大きくすると、密度ピークは、  
MHD平衡では遠心力により外側にシフト  
一方、Hall-MHD平衡では、内側にシフトする。

# Hall-MHD平衡の密度は、中空なプロファイルをもつ。



密度分布は、回転分布およびCauchyデータ(温度, 静止密度)により定まる。

温度分布  $T(\psi)$   $\longrightarrow$  トロイダル回転  $V_\phi = \frac{\sqrt{T(\psi)}}{R} \left[ C_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{T(\psi')}} \right]$



流れが無い場合の密度  $n_0(\psi)$   $\longrightarrow$  密度分布

$$n(\psi, R) = n_0(\psi) \exp \left\{ -\frac{1}{2R^2} \left[ C_2 - \frac{1}{\varepsilon} \int^\psi \frac{d\psi'}{\sqrt{T(\psi')}} \right]^2 \right\}$$

$$= n_0(\psi) \exp \left[ -\frac{V_\phi^2(R, \psi)}{2T(\psi)} \right]$$

(★)  $T(\psi) = \alpha_T \psi^2$  の場合、 $n_0(\psi) = \text{const.}$

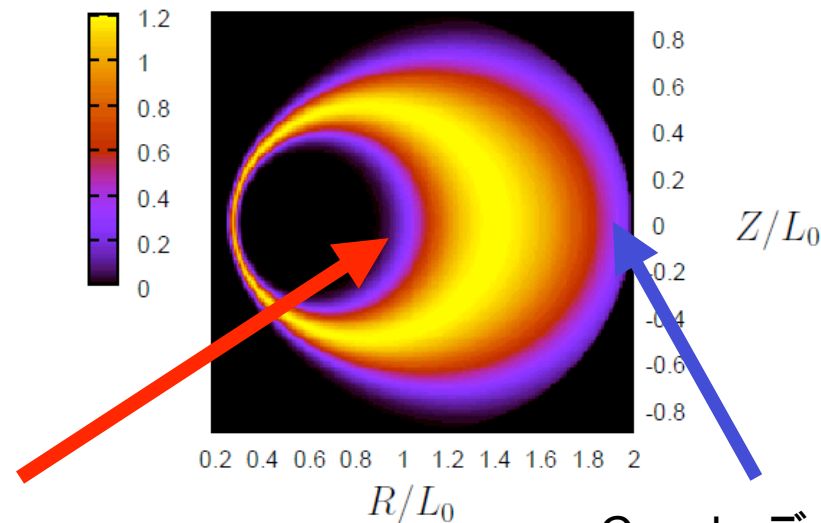
としても密度分布は殆ど変わらない。外側に向かってTが小さくなるため。

(★) したがって  $n_0(\psi) = \text{const.}$ ,  $T(\psi) = \text{const.}$

とすると、外側で密度がゼロにならなくなる。

ただし、内部導体の近くでは、流れ( $\sim 1/R$ )の効果により、密度がゼロになる。

たとえば、 $n_0(\psi) = \text{const.}$   $T(\psi) = \alpha_T \psi$  として、温度勾配を小さくすると、



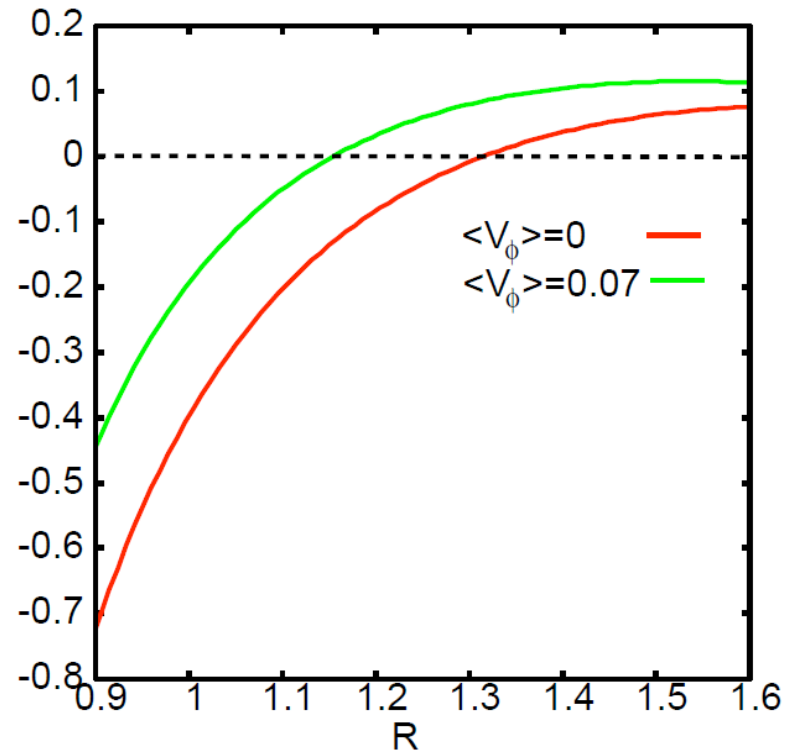
流れの効果(動圧)による閉じ込め

Cauchyデータの非一様性による閉じ込め

以下では、 $n_0(\psi) = \alpha_n \psi^2$ ,  $T(\psi) = \alpha_T \psi^2$  の場合を考える。

# Hall-MHD平衡における径方向の力のバランス

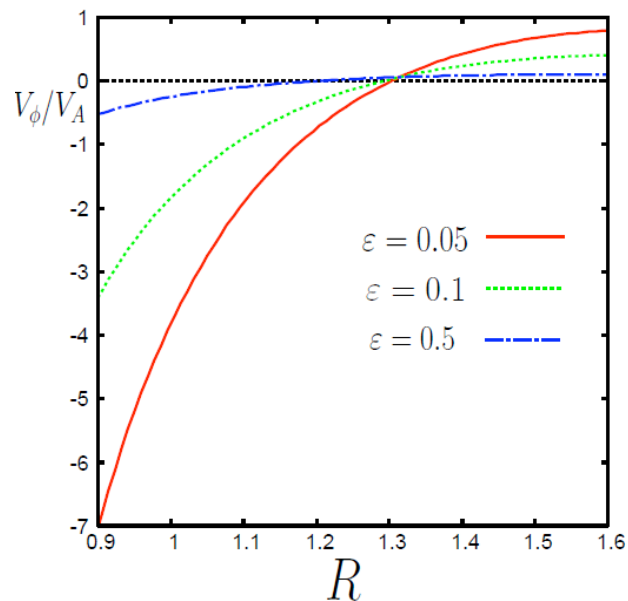
トロイダル回転分布の平均速度依存性



$T(\psi) = \alpha_T \psi^2$  の場合,  $\psi = \exp(\varepsilon \sqrt{\alpha_T} C_2)$  のところで, 回転方向の反転が起こる.

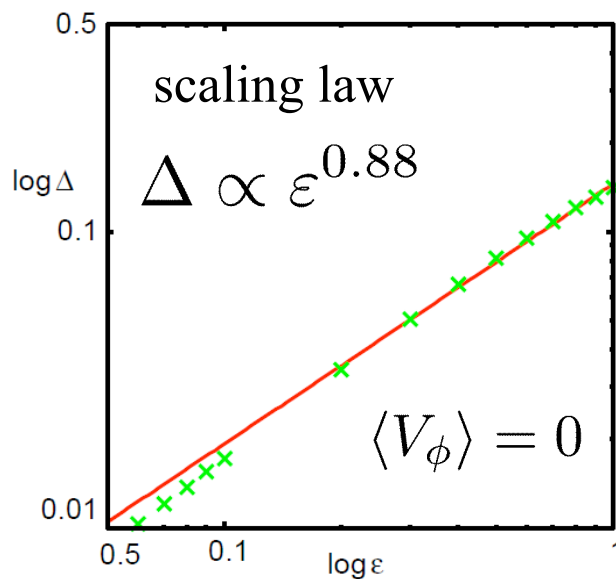
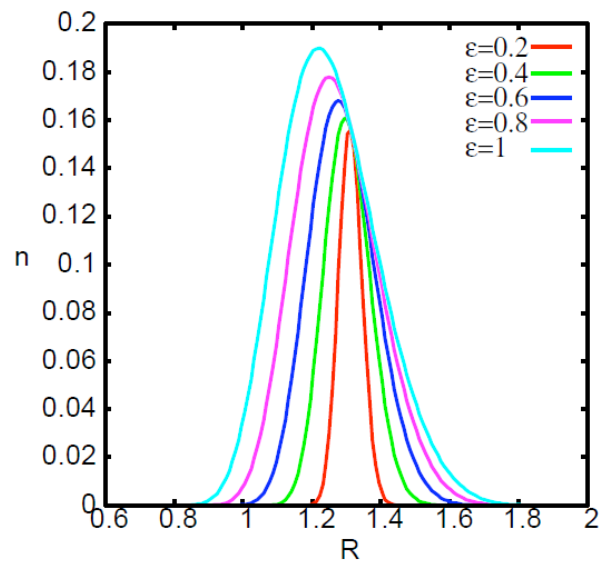
平均速度が大きくなると, 反転場所は内側にシフトする.  
内側の密度勾配は流れにより形成されるから, 密度ピークも内側にシフトする.

## トロイダル回転分布の $\varepsilon$ 依存性



$\varepsilon$ が小さくなるに従い、  
トロイダル回転のシアが大きくなる。

パラメータ $\varepsilon$ は、密度分布の巾をスケールする。



$$n \propto \exp \left[ -\frac{(R - R_0)^2}{2\Delta^2} \right]$$

でfitting



## 5. まとめ

- トロイダル回転をもつMHD平衡は, Hall効果とトロイダル効果の共存により,  
Hall-MHD固有の平衡をもつ(従来のMHD平衡も存在).
- 平均トロイダル回転を大きくするに従い, MHDでは遠心力により密度ピークは大きく外側にシフトする一方, Hall-MHD平衡では内側にシフトする.
- Hall-MHD平衡では, 密度は局所的に分布する.
- Hall-MHD平衡において平均回転速度を大きくすると, トロイダル回転が反転する場所が内側にシフトする.  
それに伴い, 密度ピークは内側にシフトする.