2008年3月17-19日　第 11回若手科学者によるプラズマ研究会

高周波電磁場中の相対論的なe-pプラズマの摩擦力による加速

東大新領域

吉田研究室　沼澤　修平

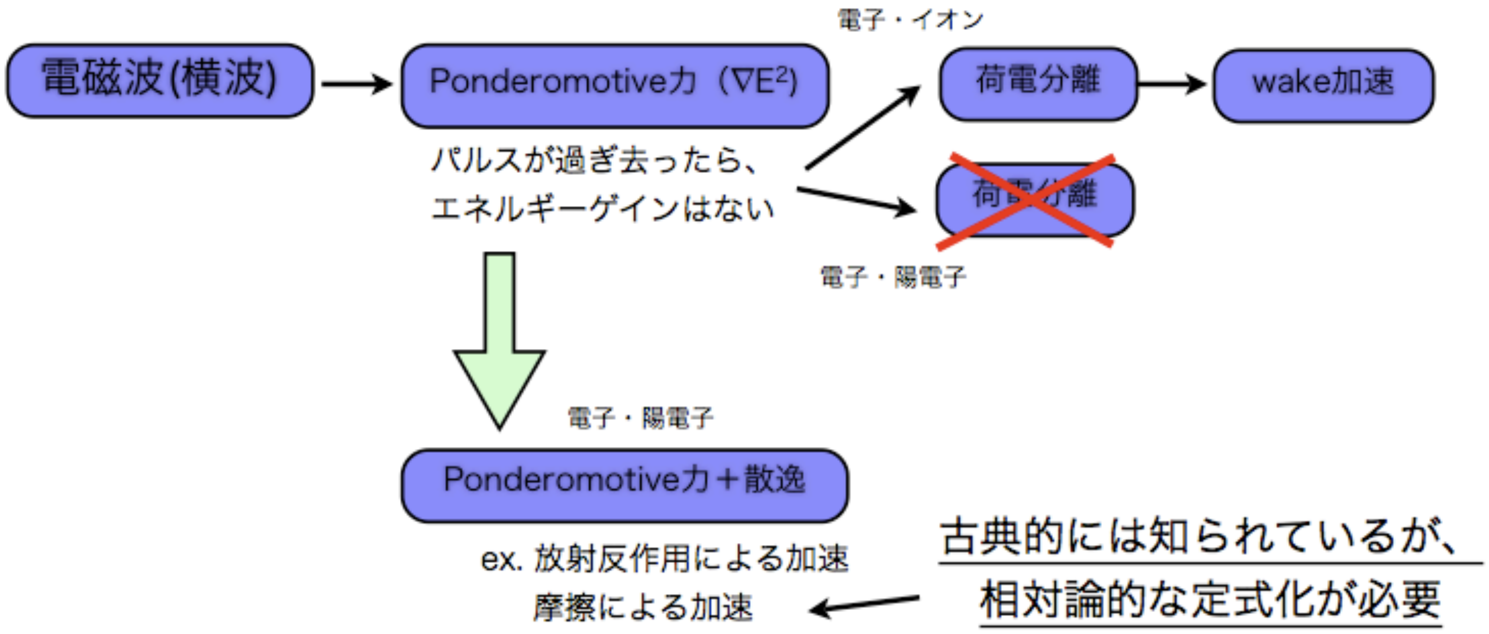
研究背景および研究目的

プラズマと電磁波の非線形相互作用は多様な現象を生み出し、粒子加速もその一つである。粒子加速の機構の代表的なものとして、以下のようなものがある。

1. 衝撃波加速（フェルミ加速, 波乗り加速)
2. 場の量とのエネルギー交換(磁気リコネクション、降着円盤における重力エネルギーの解放)
3. Ponderomotive力

Ponderomotive力は高周波な電磁波とプラズマの相互作用から生じる非線形力であり、古典的には∇E^2に比例するポテンシャル力である。その為、パルスの電磁波の通過後は正味の運動量を与えることはない。e-iプラズマでは素のPonderomotive力に付随して、Ponderomotive力で電子を押し出して出来た電荷の偏りから伝搬方向の縦電場を生成し、それによって粒子を加速する(wake-filed加速)という加速機構もあり、実際に小型かつ高性能な加速器の実現のため盛んに研究が行われている。

しかし、高エネルギーな天体現象に伴うと考えられているe-pプラズマに対しては、荷電分離の難しさからwake加速は効きがたいと考えられる。そこで、ここでは散逸性の力を考慮し、それによって正味の加速が得られることを考える。



研究目的

相対論的なe-pプラズマと高周波な電磁波（横波）との相互作用での摩擦力による加速効果を、相対論的な流体モデルを用いて解析する。粒子ではなくバルクとしての流体の加速を導出し、運動方程式だけでなくエネルギー方程式なども含めて解析する。

相対論的なe-pプラズマの基礎方程式 with 摩擦力

相対論的なe-pプラズマの流体方程式は以下の方程式系によって記述される。

$$\frac{\partial T_+^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = en_+ F^{\alpha\beta} u_\beta^+ + F_{d+}^\alpha, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_-^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -en_- F^{\alpha\beta} u_\beta^- + F_{d-}^\alpha, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (n_+ u_+^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial (n_- u_-^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = -4\pi e (n_+ u_+^\alpha - n_- u_-^\alpha), \tag{5}$$

$$T_s^{\alpha\beta} = n_s m_s c^2 G_s \left(\frac{T_s}{m_s c^2} \right) u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta} P_s \tag{6}$$

ここで、添字の$\pm$は粒子種を表し、$+$は陽電子を、-は電子についての量であることを意味する。n_sは静止系での密度、u_s^αは四元速度、$F^{\alpha\beta}$はFaradayテンソル、$T^{\alpha\beta}$はエネルギー・運動量テンソル、$G = K_3(1/z)/K_2(1/z) : z = T/mc^2$は相対論的質量ファクター、$P_s$は圧力である。本研究で考慮する摩擦力は$F_{ds}^\alpha$として表され、Gurovich[1]によると、

$$F_{d\pm}^\alpha = \mp c e^2 n_+ n_- \sigma^{-1} (u_+^\alpha - u_-^\alpha) \tag{7}$$

という共変ベクトルとして与えられる。

この方程式系を３次元ベクトル表示すると、

$$\frac{d}{dt}(mc^2G_+\gamma_+) - \frac{1}{N_+}\frac{\partial P_+}{\partial t} = e\boldsymbol{v}_+\cdot\boldsymbol{E} - \frac{c^2e^2n_-}{\gamma_+}\sigma^{-1}(\gamma_+ - \gamma_-), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}(mc^2G_-\gamma_-) - \frac{1}{N_-}\frac{\partial P_-}{\partial t} = -e\boldsymbol{v}_-\cdot\boldsymbol{E} - \frac{c^2e^2n_+}{\gamma_-}\sigma^{-1}(\gamma_- - \gamma_+), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}(G_+\boldsymbol{p}_+) + \frac{1}{N_+}\nabla P_+ = e(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}_+}{c}\times\boldsymbol{B}) - \frac{e^2n_-}{\gamma_+}\sigma^{-1}(\gamma_+\boldsymbol{v}_+ - \gamma_-\boldsymbol{v}_-), \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}(G_-\boldsymbol{p}_-) + \frac{1}{N_-}\nabla P_- = -e(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}_-}{c}\times\boldsymbol{B}) - \frac{e^2n_+}{\gamma_-}\sigma^{-1}(\gamma_-\boldsymbol{v}_- - \gamma_+\boldsymbol{v}_+), \tag{11}$$

$$\frac{\partial N_+}{\partial t} + \nabla\cdot(N_+\boldsymbol{v}_+) = 0, \qquad \frac{\partial N_-}{\partial t} + \nabla\cdot(N_-\boldsymbol{v}_-) = 0, \tag{12}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}(n_+\boldsymbol{v}_+ - n_-\boldsymbol{v}_-), \qquad \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{13}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi e(n_+ - n_-), \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{14}$$

ここで、N_s **は実験室系での密度を表す。**(1),(2) **に** u_s^α **をかけることにより、エントロピーの方程式が得られる。**

$$\frac{1}{z_+}\frac{dS_+}{dt} = \frac{dG_+}{dt} - \frac{1}{n_+}\frac{dP_+}{dt} = -\frac{c^2e^2n_-\sigma^{-1}}{\gamma_+}(1 - u_\alpha^+u_-^\alpha), \tag{15}$$

$$\frac{1}{z_-}\frac{dS_-}{dt} = \frac{dG_-}{dt} - \frac{1}{n_-}\frac{dP_-}{dt} = -\frac{c^2e^2n_+\sigma^{-1}}{\gamma_-}(1 - u_\alpha^-u_+^\alpha), \tag{16}$$

$$S_s = \ln\left[\frac{K_2(1/z_s)\exp(z_sG_s)}{z_s^2P_s}\right] \tag{17}$$

相対論的なPonderomotive力と摩擦による加速力

上述の方程式系を用いて、相対論的なe-pプラズマと横波の高周波な電磁波との相互作用によるPonderomotive力と摩擦による加速力を求める。Ponderomotive力を流体方程式から導出する際には、物理量Aを速い変動$\tilde{A}$とゆっくりとした変動である平均部分$\bar{A}$にわけ、$\tilde{A}$の二次の項を$\bar{A}$の発展方程式に繰り込むことから得られる。ここでは、背景磁場は存在しない純粋な横波を考え、電場$E(x, t)$は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{x}, t) e^{i(kz-\omega t)} = \int\int \hat{\boldsymbol{E}}(\kappa, \Omega) e^{i(\kappa z - \Omega t)} e^{i(kz-\omega t)} d\kappa d\Omega \tag{18}$$

と書き表されるようなものを考える。κ, Ωは伝搬方向、時間に関する非一様性を表しており、$\kappa \ll k, \quad \Omega \ll \omega$と仮定する。また、伝搬方向に垂直な方向には波は一様であるとする。対称性より$N_+ = N_-$, $T_+ = T_-$, $\gamma_+ = \gamma_-$とする。さらに、このような横波では伝搬方向への荷電分離は起こらない。従って、Ponderomotive力や加速力は運動方程式とMaxwell方程式から得ることが出来る。今電子と陽電子の２成分が存在するが、対称性より今後は陽電子についてのみ考える。その際、摩擦力は$\propto -(\boldsymbol{v}_\perp^+ - \boldsymbol{v}_\perp^-) = -2\boldsymbol{v}_\perp^+$となっているが、先行する研究との比較を容易にする為に、$\propto -\boldsymbol{v}^+$とする。また、ここではバルクの流体速度は非相対論的$(\gamma \simeq 1)$であって、相対論的な熱速度を持つプラズマを考える。

陽電子に関しては、

$$\frac{d}{dt}(mc^2 G) - \frac{1}{n}\frac{\partial P}{\partial t} = e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}, \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt}(G\boldsymbol{v}) = -\frac{1}{mn}\nabla P + \frac{e}{m}(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}) - \nu(n, T)\boldsymbol{v} \tag{20}$$

となる。ここで、$\nu(n,T)=(e^2n)/(m\sigma)$である。添字の$+$は以後省略する。(19)と(20)を用いて、

$$G\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\frac{1}{mn}\nabla P+\frac{e}{m}(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B})-\nu\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{v}}{mc^2}\left(\frac{1}{n}\frac{\partial P}{\partial t}+e\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\right) \tag{21}$$

$\tilde{E}$, $\tilde{B}$にともなう密度変動はないため、圧力の項を無視する。(21)を速く変動する部分とゆっくり変動する部分に分けると、ゆっくりした変動は

$$\begin{aligned}G\frac{\partial\bar{\boldsymbol{v}}}{\partial t}=&-G(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\bar{\boldsymbol{v}}+\frac{e}{m}\bar{\boldsymbol{E}}-\nu\bar{\boldsymbol{v}}-G\overline{(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{v}}}+\overline{\frac{\tilde{\boldsymbol{v}}}{c}\times\tilde{\boldsymbol{B}}}\\&-\frac{e}{mc^2}\left[\bar{\boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\bar{\boldsymbol{E}})+\bar{\boldsymbol{v}}\overline{(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})}+\overline{\tilde{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\bar{\boldsymbol{E}})}+\overline{\tilde{\boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})}\right]\end{aligned} \tag{22}$$

と書くことが出来、速い変動は

$$\begin{aligned}G\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial t}=&-G(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{v}}-G(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\bar{\boldsymbol{v}}+\frac{e}{m}\tilde{\boldsymbol{E}}+\frac{\bar{\boldsymbol{v}}}{c}\times\tilde{\boldsymbol{B}}-\nu\tilde{\boldsymbol{v}}\\&-\frac{e}{mc^2}\left[\bar{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\bar{\boldsymbol{E}})+\bar{\boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})+\tilde{\boldsymbol{v}}(\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\bar{\boldsymbol{E}})+\tilde{\boldsymbol{v}}(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\tilde{\boldsymbol{E}})\right]\end{aligned} \tag{23}$$

と書ける。$\overline{A}$は短い時定数に関して平均をとることを表す。$\bar{v}\ll\tilde{v}$と仮定する。(22)に関して、大括弧内の$\tilde{v},\tilde{E}$についての2次の項は伝搬方向には寄与しないため、ここでは考えない。(23)に関して、$|E|\simeq m\omega c/e$となる時は、３次の項の寄与が無視出来ないが、この項は線形波に対する高調波を生成するのであって、相互作用の初期に関しては無視しても構わないと考える。

Ponderomotive力は

$$\boldsymbol{f}_p=-\overline{(\tilde{\boldsymbol{v}}\cdot\nabla)\tilde{\boldsymbol{v}}}+\frac{1}{G}\overline{\frac{\tilde{\boldsymbol{v}}}{c}\times\tilde{\boldsymbol{B}}} \tag{24}$$

であり、$\tilde{v}, \tilde{B}$ は

$$G\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{v}}}{\partial t} = \frac{e}{m}\tilde{\boldsymbol{E}} - \nu\tilde{\boldsymbol{v}}, \tag{25}$$

$$\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{B}}}{\partial t} \tag{26}$$

を満たす。(25),(26) より

$$\tilde{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{2}\big[\frac{i}{\omega G + i\nu}\frac{e}{m}\tilde{\boldsymbol{E}}e^{-i\omega t} + c.c\big], \qquad \tilde{\boldsymbol{B}} = \frac{1}{2}\big[\frac{-ic}{\omega}\nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}}e^{-i\omega t} + c.c\big] \tag{27}$$

と表せる。これを (24) に代入することにより、

$$\boldsymbol{f}_p = -\frac{e^2}{m^2G^2\omega^2}\nabla E^2 + \frac{e^2\nu E^2\boldsymbol{k}}{2m^2G^3\omega^3} \tag{28}$$

と得られる。$G \simeq 1$ という非相対論的温度の時には、Schmidt[2] によって得られた古典的表式

$$\boldsymbol{f}_{p,NR} = -\frac{e^2}{m^2\omega^2}\nabla E^2 + \frac{e^2\nu E^2\boldsymbol{k}}{2m^2\omega^3} \tag{29}$$

に一致する。

摩擦力による加速と温度上昇

本研究では、相対論的なe-pプラズマと電磁波の相互作用に対する摩擦力の効果を解析しており、前節では摩擦力の効果により、通常のポテンシャル力としてのPonderomotive力に加えて、伝搬方向の加速力が生じることを見た。しかしながら、摩擦力の効果は加速だけでなく、散逸による温度上昇も引き起こす。通常Ponderomotive力に関する研究は力の導出に主眼が置かれており、温度上昇と加速とを連動して取り扱うことは行われない。そこで、ここでは今まで扱ってきた方程式系に対して簡単な１変数解を探すことにより、摩擦力による加速と加熱とを同時に解析する。考える状況は前節と同じであり、横波中のe-pプラズマの運動を考える。対称性より、$v_z^+ = v_z^-$, $\boldsymbol{v}_\perp^+ = -\boldsymbol{v}_\perp^-$, $N_+ = N_- = N$, $T_+ = T_-$, $E_z = \rho = J_z = 0$と仮定する。以後陽電子の方程式についてのみ考えいく。

$$\frac{d}{dt}(G\boldsymbol{p}) = -\frac{1}{N}\nabla P + \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} - 2\nu\boldsymbol{v}_\perp, \tag{30}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla\cdot(N\boldsymbol{v}) = 0, \tag{31}$$

$$\frac{1}{z}\frac{dS}{dt} = \frac{2\nu}{\gamma}p_\perp^2, \qquad S = \ln\left[\frac{K_2(1/z)\exp(zG)}{z^2P}\right] \tag{32}$$

ここで方程式は、$x'^\alpha = (\omega/c)x^\alpha$, $F'^{\alpha\beta} = (q/mc\omega)F^{\alpha\beta}$, $n' = n/N_0$, $p' = p/N_0mc^2$, $T'^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}/(N_0mc^2)$を用いて規格化し、上式では$'$を除いてある。$\boldsymbol{p} = \gamma\boldsymbol{v}$である。(30)を伝搬方向に

平行な成分と垂直成分に分けると

$$\frac{d}{dt}(G\boldsymbol{p}_\perp) = \boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_\perp - 2\nu\boldsymbol{v}_\perp, \tag{33}$$

$$\frac{d}{dt}(Gp_z) = -\frac{1}{N}\frac{\partial P}{\partial z} + (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_z \tag{34}$$

ここで、$A(\tau):\tau = t - z$という解を探す。τを用いて方程式を書き換えると、

$$\frac{d}{d\tau}(G\boldsymbol{p}_\perp) = \boldsymbol{E}_\perp - \frac{2\nu}{\gamma - p_z}\boldsymbol{p}_\perp, \tag{35}$$

$$(\gamma - p_z)\frac{d}{d\tau}(Gp_z) = \frac{1}{n}\frac{dP}{d\tau} + \boldsymbol{v}_\perp\cdot\boldsymbol{E}_\perp, \tag{36}$$

$$\frac{1}{z}\frac{dS}{d\tau} = \frac{2\nu}{\gamma - p_z}p_\perp^2 \tag{37}$$

となる。(35) と (36) を組み合わせることにより、

$$\frac{d}{d\tau}\big[G(\gamma - p_z)\big] = 0 \rightarrow G(\gamma - p_z) = G_0 \tag{38}$$

が得られ、これから

$$p_z = \frac{G^2(1+p_\perp^2) - G_0^2}{2GG_0}, \qquad \gamma = \frac{G^2(1+p_\perp^2) - G_0^2}{2GG_0}, \tag{39}$$

$$v_z = \frac{G^2(1+p_\perp^2) - G_0^2}{G^2(1+p_\perp^2) + G_0^2}, \qquad \frac{1-v_z}{1+v_z} = \frac{G_0^2}{G^2(1+p_\perp^2)} \tag{40}$$

解くべき方程式

$$\frac{d}{d\tau}(G\boldsymbol{p}_\perp) = \boldsymbol{E}_\perp - \frac{2\nu G}{G_0}\boldsymbol{p}_\perp, \tag{41}$$

$$\frac{dF}{d\tau} = 2\nu z\frac{G}{G_0}p_\perp^2 F, \tag{42}$$

$$F(T) = \frac{K_z \exp(zG)}{zG}, \tag{43}$$

$$p_z = \frac{G^2(1+p_\perp^2) - G_0^2}{2GG_0}, \tag{44}$$

$$\gamma = \frac{G^2(1+p_\perp^2) + G_0^2}{2GG_0}, \tag{45}$$

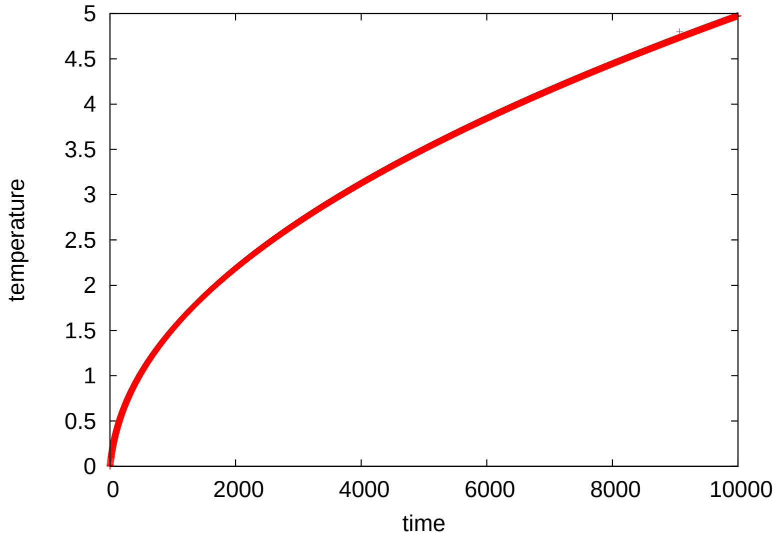
$$v_z = \frac{G^2(1+p_\perp^2) - G_0^2}{G^2(1+p_\perp^2) + G_0^2}, \tag{46}$$

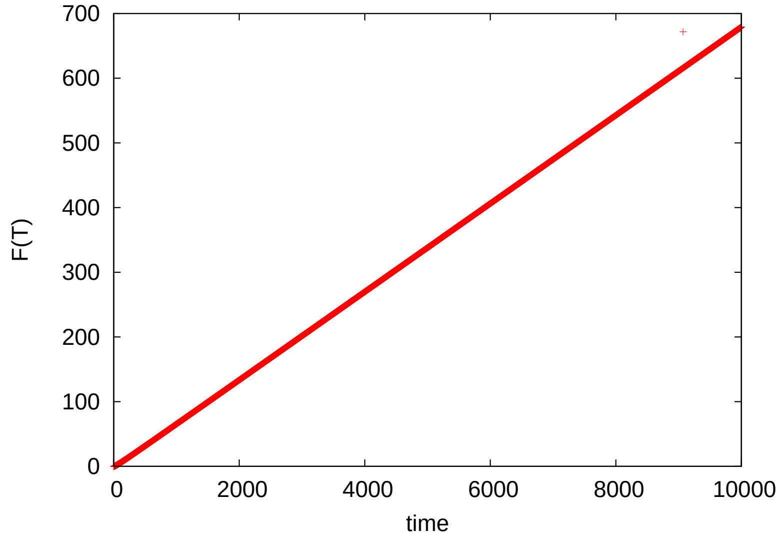
$$\frac{1-v_z}{1+v_z} = \frac{G_0^2}{G^2(1+p_\perp^2)} \tag{47}$$

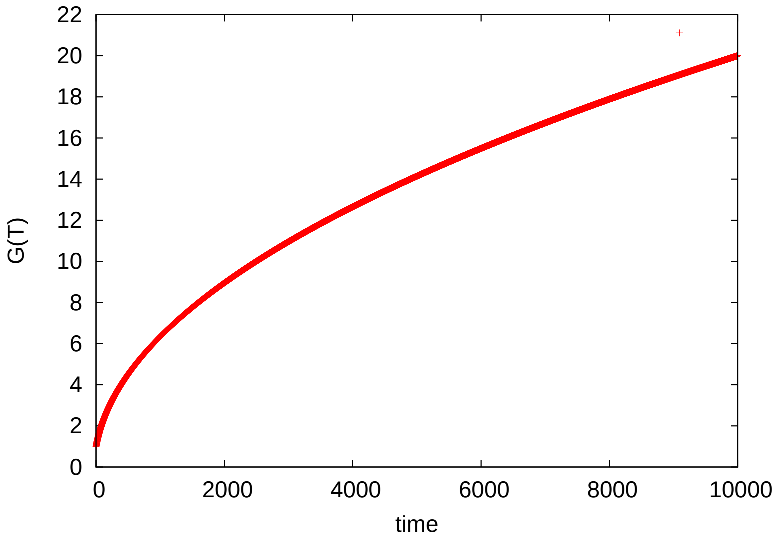
この方程式系では、通過してくる電磁場を与えることにより、$G\boldsymbol{p}_\perp$ と $F(T)$ の時間発展を定め、それらの量から v_z, γ といった重要な量を定めることが出来る。ここでは、$\boldsymbol{E}_\perp$ が $\boldsymbol{E}_\perp = E_0(\tau)(\boldsymbol{e}_x \sin\tau + \boldsymbol{e}_y \cos\tau)$ と円偏波を考える。

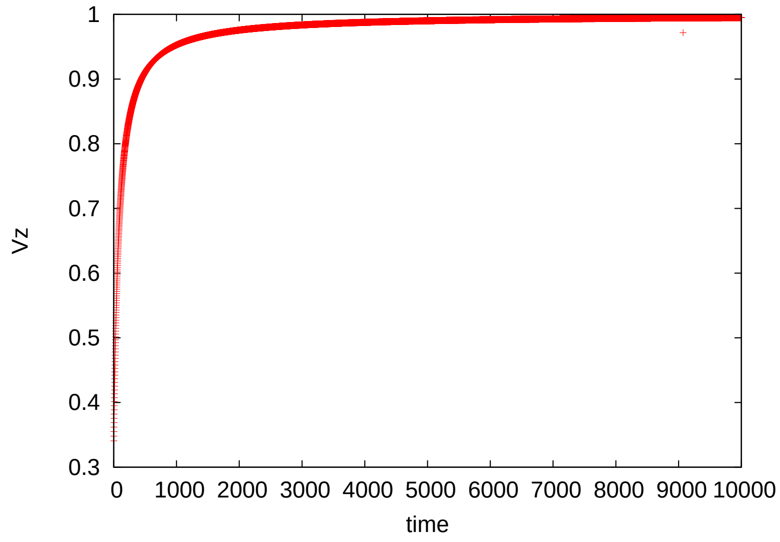
数値解析の結果

$E_0 = const,\, T(\tau = 0) \simeq 0$という条件で上式を数値解析を行った結果を示す。









結論

1. 本研究では、相対論的なe-pプラズマと横波の電磁波の非線形相互作用に対する摩擦力の効果を相対論的な流体モデルを用いて解析した。高周波運動に関する線形分散関係をゆっくりとした運動に繰り込むことにより、ローカルなPonderomotive力の導出を行うことにより、伝搬方向への加速力が古典論から相対論的な補正を受けた形で得られた。
2. 流体として、エネルギー方程式なども含めたトータルの解析を行った。伝搬座標で考えることにより、方程式系を１独立変数の常微分方程式系に帰着し、数値解析を行った。散逸性の摩擦力の効果により、確かに温度上昇と理論計算で行った伝搬方向の加速が得られた。同じく散逸性の力である放射反作用力では、伝搬方向の加速とクーリングの効果が得られることが知られており、同じ散逸性の力でも、物質同士の相互作用から生じるものなのか、物質と電磁場との相互作用で生じるものなのかによって性質が異なることがわかった。
3. 　ここで得られた加速は粒子に対してではなく、バルクの流体に対する加速であり、天体現象でのジェットなどの現象と関連するのではないかと考えられる。

参考文献

(1) V. Ts. Gurovich, L. S. Solov'ev, Sov. Phys. JETP, **64**, 677

(2) G. Schmidt, Phys. Lett. **74**, 222