輻射捕獲過程の空間分布を考慮した衝突輻射モデル

東京大学大学院工学系研究科

飯田 洋平, 門 信一郎, 鈴木 弘

鈴木 健二, 田中 知

「第12回　若手科学者によるプラズマ研究会」
3/16-18@ 日本原子力研究開発機構 那珂研究所

研究背景①(Optical Escape Factorの必要性)

- He原子の線スペクトル強度比法への期待
  - 核融合境界層／ダイバータプラズマやダイバータ模擬装置で適用.
  - 発光分光で求めた励起密度分布を，ヘリウム原子の衝突輻射(CR)モデルと比較し，電子温度/電子密度を得る.
  - 受動分光のため，線積分値として解釈されることが多かった.
  - **今後は分布計測や画像計測への適用**

- ダイバータ領域ではHe原子の密度が比較的高い(n_{He}>10^{14}cm^{-3})
  → 輻射捕獲の効果を無視することが出来ない.

- Optical Escape Factor (OEF): Λ
  - 輻射捕獲によりアインシュタインのA係数が実効的に減少する.

$$\boxed{\Lambda = \text{実効的A係数} / \text{真のA係数}}$$

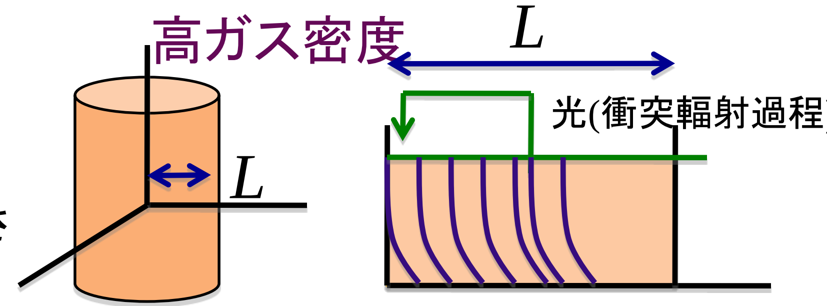
  - **線スペクトル強度比法の分布計測や画像計測への適用には，計測された任意の上準位分布に対するOEFの空間分布が必要.**

研究背景②(OEFとCRモデルの関係)

光子の輸送プロセスが，発光位置(計測点)の励起密度分布に与える効果

OEF Λ
: A → ΛA

吸収過程∝光子場の強さ



輝線強度比
の計測: $n(p)$ 比

CRモデル
: $n(p)$比

自然放出過程
電子衝突過程
etc…

比較
フィッティング

電子密度 n_{e}
電子温度 T_{e}
の導出

プラズマ形状，大きさ(特性長)
上(下)準位分布形状: $n_{q(p)}(R)$
スペクトル形状: $P_{q(p)}(\Delta\lambda)$

$$\hat{\tau}_{qp} \propto (f_{qp}\lambda_{qp}) \times \frac{n_p L}{T_g} \propto \frac{p_0 L}{T_g^{3/2}}$$

光学的厚さ　τ:
exp(-τ): 体系外に漏れてくる光子の割合

研究背景③(既存研究と本研究の目的)

- OEFに関する既存研究:
  - 理論的研究[1-4]

<table>
<tr><th></th><th>Holstein(1947)/Molisch(1992)</th><th>Fujimoto(1979)</th><th>Otsuka(1979)</th></tr>
<tr><td>上準位密度分布</td><td>正規直交関数系</td><td>0次ベッセル
(放物型Like)</td><td rowspan="2">上準位と下準位の
比が空間一様</td></tr>
<tr><td>下準位密度分布</td><td>空間一様</td><td>空間一様</td></tr>
<tr><td>式の形/適用範囲</td><td>近似式/全体</td><td>近似式/中心のみ</td><td>積分式/中心のみ</td></tr>
</table>

  - 実験的研究 (線スペクトル強度比法への適用)
    - ダイバータ模擬装置を中心にFujimotoの式や，Otsukaの式を用いて実験的考察が進められている[5][6][7].
    - 但し，周辺領域ではFujimotoの式やOtsukaの式を適用できない.

本研究の目的:

任意の(対称型)上準位分布を持つプラズマの任意の位置における Optical Escape Factorの値を求める.

[1] T.Holstein, Phys. Rev. **72**, 1212(1947) and **83**, 1159(1951), [2] A. F. Molisch *et.al.*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **49**, 361(1993)
[3] M.Otsuka *et.al.*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **21**, 41 (1979), [4] T. Fujimoto, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **21**, 439(1979)
[5] Y. Iida *et.al.*, J. Plasma Fusion Res. SERIES, **14**, 123(2006), [6] S. Kajita, *et.al.*, Phys. Plasmas, **13**, 013301(2006)
[7] D. Nishijima, *et.al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **49**, 791(2007).

Optical Escape Factorの由来

- 輻射捕獲を含まないレート方程式

$$\frac{dn_p}{dt} = -\left\{\sum_{q\neq p} C_{pq} n_e + S_p n_e + \sum_{q<p} \underline{A_{pq}}\right\} n_p \quad \text{：流出項}$$

$$+\left\{\sum_{q\neq p} C_{qp} n_e n_q + \sum_{q>p} \underline{A_{qp}} n_q\right\} + \left\{\alpha_p n_e + \beta_p + \beta_{dp}\right\} n_i n_e \quad \text{：流入項}$$

C:電子衝突(脱)励起
S:電子衝突電離
A:自然放出
B:吸収/誘導放出
α:三体再結合
β:放射再結合
β_d:二電子性再結合
I:放射エネルギー密度

- 輻射捕獲を含むレート方程式

$$\frac{dn_p}{dt} = -\left\{\sum_{q\neq p} C_{pq} n_e + S_p n_e + \sum_{q<p} A_{pq} + \sum_{q>p} B_{pq} I + \sum_{q<p} B_{pq} I\right\} n_p$$

$$+\left\{\sum_{q\neq p} C_{qp} n_e n_q + \sum_{q>p} A_{qp} n_q + \sum_{q<p} B_{qp} n_q I + \sum_{q>p} B_{qp} n_q I\right\} + \left\{\alpha_p n_e + \beta_p + \beta_{dp}\right\} n_i n_e$$

$$= -\left[\sum_{q\neq p} C_{pq} n_e + S_p n_e + \sum_{q<p} \underline{\left\{A_{pq} - \left(B_{qp} \frac{n_q}{n_p} - B_{pq}\right) I\right\}}\right] n_p$$

$$+\left[\sum_{q\neq p} C_{qp} n_e n_q + \sum_{q>p} \underline{\left\{A_{qp} - \left(B_{pq} \frac{n_p}{n_q} - B_{qp}\right) I\right\}} n_q\right] + \left\{\alpha_p n_e + \beta_p + \beta_{dp}\right\} n_i n_e$$

A_{qp}(置き換え)

$$\to A_{qp} - \left(B_{pq} \frac{n_p(r)}{n_q(r)} - B_{qp}\right) I_{qp}(r)$$

東京大学 THE UNIVERSITY OF TOKYO

計算の概要(仮定と必要パラメータ)

- ## OEFの定義式

$$\Lambda_{qp}(r)A_{qp} = A_{qp} - \left(B_{pq}\frac{n_p(r)}{n_q(r)} - B_{qp} \right) I_{qp}(r)$$

$n_p(\mathbf{r})$:下準位密度分布, $n_q(\mathbf{r})$:上準位密度分布
$I_{qp}(\mathbf{r})$:分光放射エネルギー密度[W·m^{-3}·Hz^{-1}]

- ## Iの計算手順

1. 一次元の輻射輸送方程式
2. 解を全立体角で積分
3. 振動数(波長)で積分
   (発光/吸収スペクトルに
   振動数依存性)

=四重積分(空間x3, 振動数x1)
(※下準位密度空間一様の場合)

- ## Iの計算上の仮定
  - 系外からの入射光なし
  - 上/下準位の温度共に空間一様
  - 下準位密度空間一様(低電離)
  - 上準位密度<<下準位密度
    (誘導放出項は無視)

- ## 必要なパラメータ
  - プラズマの形状と大きさ
    球形, 円筒形, 平行平板形, , ,
    特性長(大きさ)
  - スペクトル形状
    ガウス型, ローレンツ型, , ,
    上/下準位の温度比
  - 上準位密度分布(相対値)
    任意の(点・軸・面)対称形状
  - 下準位密度(絶対値)

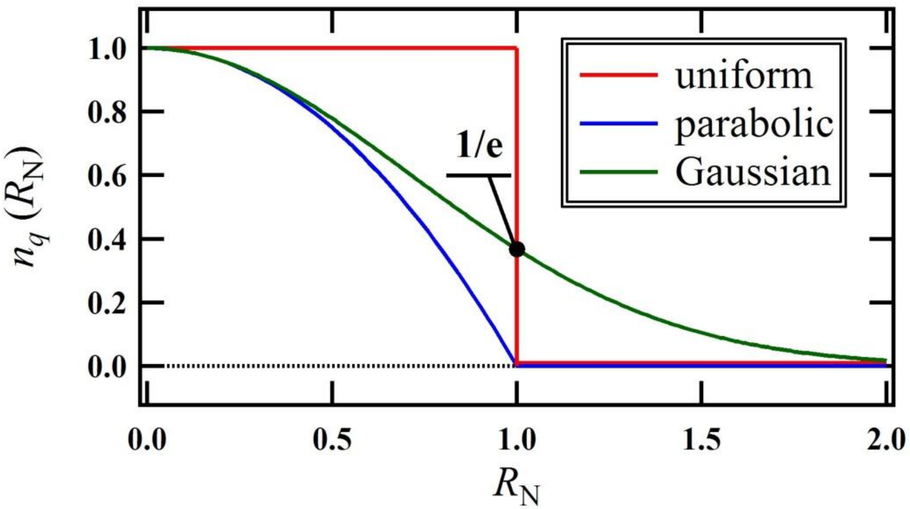
上準位分布形状と特性長について

- **テスト分布関数:$n_q(R_N)$**

$$\text{uniform}: n_q(R_N) = \begin{cases} 1 & (R_N < 1) \\ 0 & (R_N > 1) \end{cases}$$

$$\text{parabolic}: n_q(R_N) = \begin{cases} 1 - R_N^2 & (R_N < 1) \\ 0 & (R_N > 1) \end{cases}$$

$$\text{Gaussian}: n_q(R_N) = \exp(-R_N^2)$$



- **特性長 L(分布の幅)**
  - 上準位分布形状毎に計算者が適当に決定.
  - 本研究では,

    uniformとparabolicプロファイルでは,

    →中心～分布関数がゼロになる位置までの長さ

    Gaussianプロファイルでは,

    →中心～分布関数が1/eになる位置までの長さ

OEFの表式(無限長円筒形，ガウス型スペクトル)

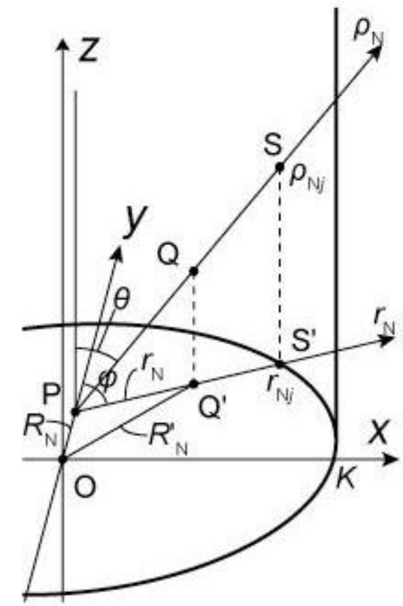
- 任意の軸対称型上準位分布，任意の位置におけるOEFの表式

$$\Lambda(R_{\mathrm{N}},\tau)=1-\frac{2}{\pi\sqrt{\pi}}\frac{\tau}{n_q(R_{\mathrm{N}})}\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\infty}dx\exp\left[-\left(1+\frac{T_q}{T_p}\right)x^2\right]$$
$$\times\int_0^{r_N}dr_{\mathrm{N}}\left\{n_q(R'_{\mathrm{N}})\exp\left[-\frac{\tau\cdot r_{\mathrm{N}}}{\sin\theta}\exp\left(-\frac{T_q}{T_p}x^2\right)\right]\right\}$$

但し， $\tau=k_{pq0}L=\frac{e^2}{4m_e c\varepsilon_0}f_{pq}\lambda_{qp}\sqrt{\frac{M}{2\pi\kappa T_p}}\times n_p L$

$r_{\mathrm{N}j}=\sqrt{K^2-R_{\mathrm{N}}^2\sin^2\varphi}-R_{\mathrm{N}}\cos\varphi$,（$K$はモデル境界）

$R'_{\mathrm{N}}=\sqrt{R_{\mathrm{N}}^2+r_{\mathrm{N}}^2+2R_{\mathrm{N}}r_{\mathrm{N}}\cos\varphi}$

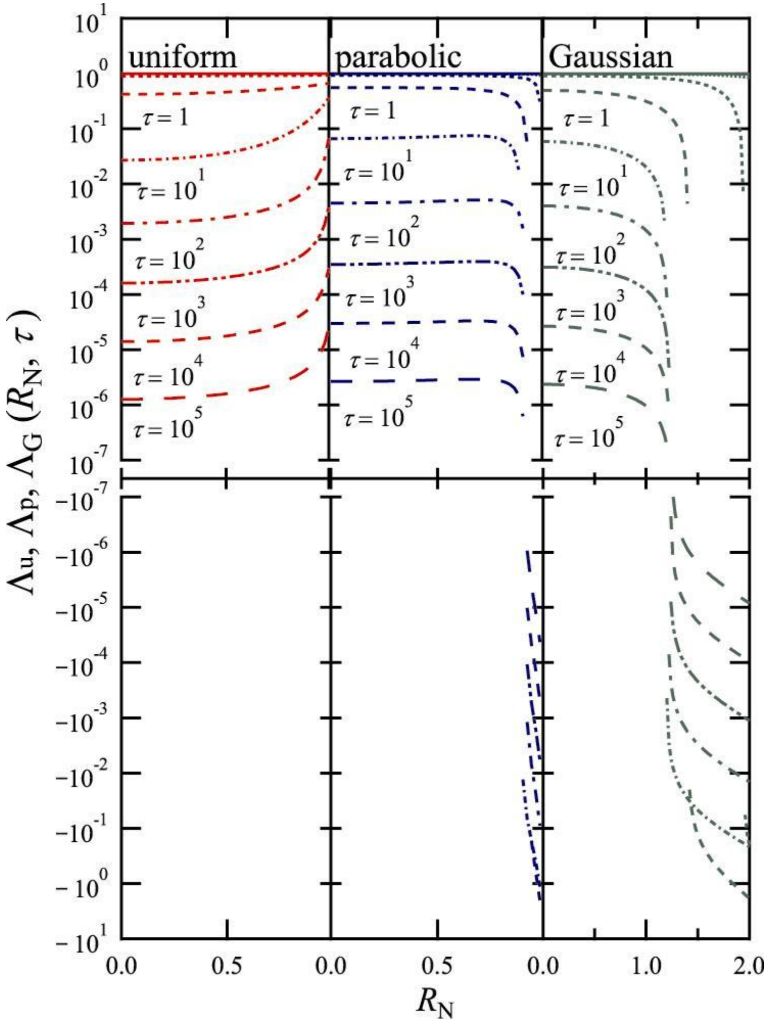


図．円筒プラズマにおける座標系

– OEFは上準位の分布形状($n_q(R_{\mathrm{N}})$)，Optical Depth(τ), 規格化半径位置(R_{N})，上/下準位温度比(T_q/T_p)の関数．
– $n_q(R_{\mathrm{N}})$(上準位密度分布) は，相対値のみ分かれば十分

計算結果①(各上準位分布での空間分布)

- OEFの空間分布



正

負

- Uniform, Parabolic, Gaussian の各上準位分布に対するOEFの空間分布が得られた.

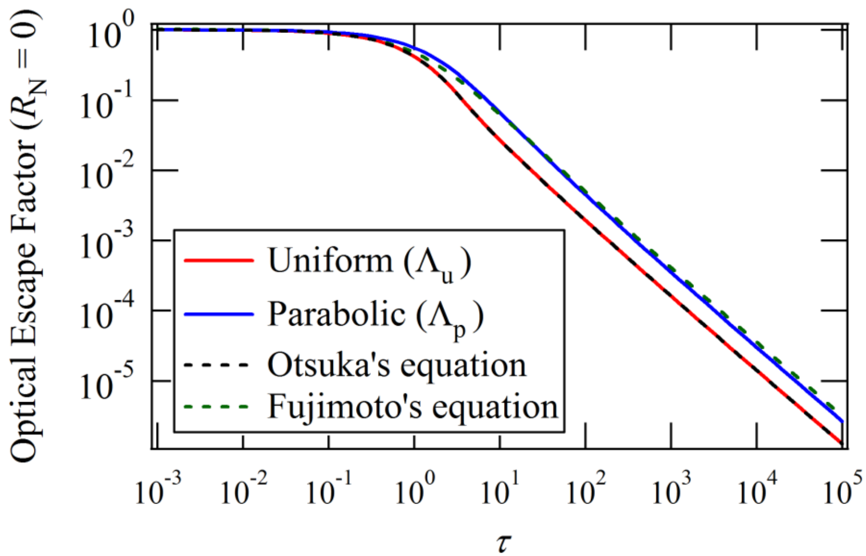
  →任意の位置において輻射捕獲を考慮したCRモデルの計算が可能.

- 周辺部では，負の値を取ることがある.

  （中心部が強い光源として働く為，発光量＜吸収量）

計算結果②（既存モデルとの比較検証）

- 各上準位分布毎の円筒中心軸上におけるOEF



– Uniform:Λ_u…Otsukaの式と等価.

→上準位分布と空間位置に関して，
Otsukaの式の一般化となっている.

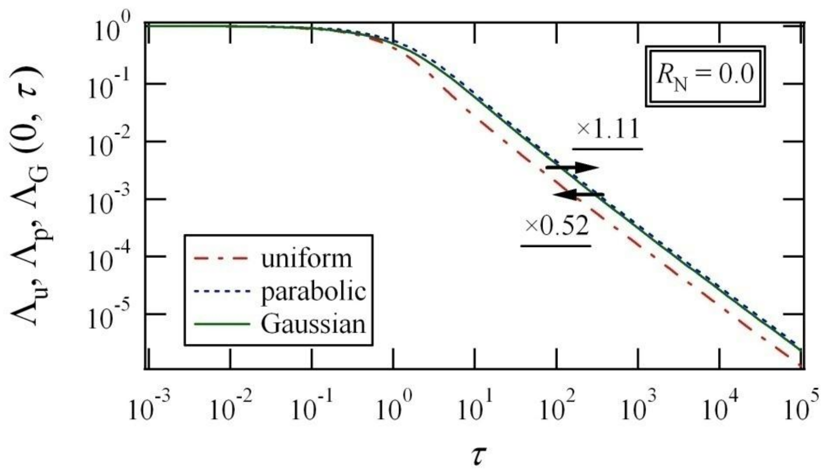
$$\Lambda(R_N = 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty dx \int_0^1 dt \exp\left[-x^2 - \frac{\hat{\tau}}{t}\exp\left(-x^2\right)\right]$$

– Parabolic:Λ_p…Fujimotoの式と20%以内で一致.

$$\Lambda(R_N = 0) = \frac{1.92 - 1.3/(1+\tau^{1.2})}{(\tau + 0.62)\left[\pi \ln(1.357 + \tau)\right]^{1/2}}$$

計算結果③（3上準位分布間の対応関係）

- **3つのテスト関数間の特性長Lの関係**



– 平行移動によりほぼ重なる

→適切な特性長Lを取る事で可能

$\Lambda_G(\tau) \sim \Lambda_u(0.52\tau)$ (誤差33%以内)

$\Lambda_G(\tau) \sim \Lambda_p(1.11\tau)$ (誤差8%以内)

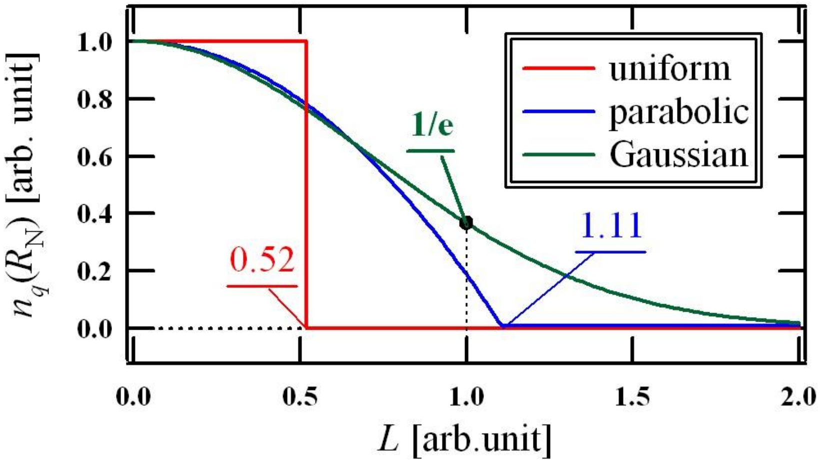
- **中心軸上で同じOEFの値を与える上準位プロファイル**

$$\text{Uniform}: n_q(R_N) = \begin{cases} 1 & (R_N < 0.52) \\ 0 & (R_N > 0.52) \end{cases}$$

Parabolic :

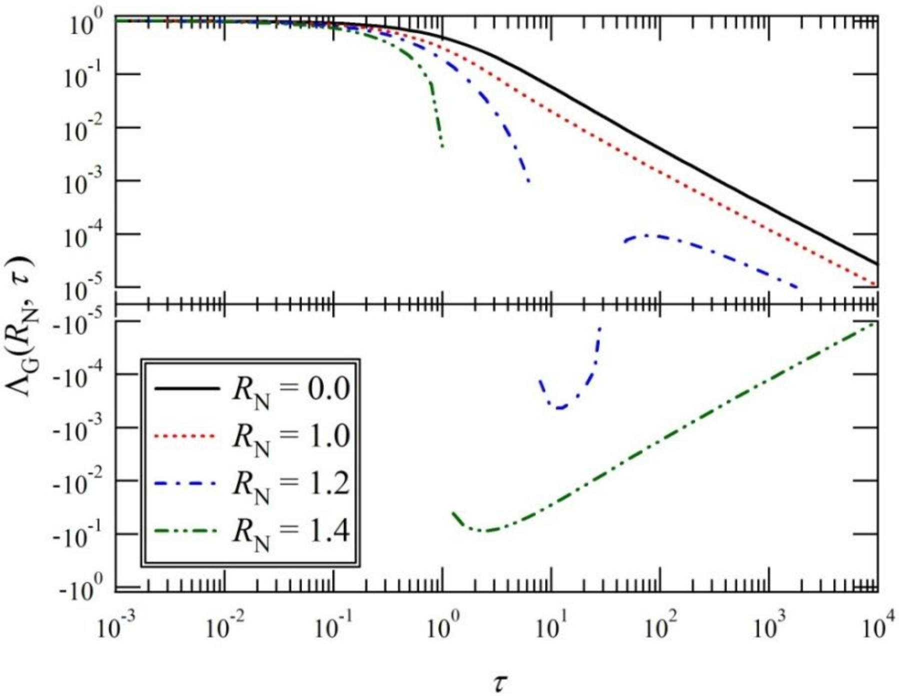
$$n_q(R_N) = \begin{cases} 1-(R_N/1.11)^2 & (R_N < 1.11) \\ 0 & (R_N > 1.11) \end{cases}$$

$$\text{Gaussian}: n_q(R_N) = \exp(-(R_N/1)^2)$$



計算結果④（OEFのτ依存性@周辺部）

- 各位置のOEFのτ依存性(上準位:Gaussian)



–R_N<1…R_N=0とほぼ同じ依存性（既存の式とほぼ同じ依存性）
→**適切な特性長を取れば既存の式で代用可能.**
–R_N>1…既存の式と大きく異なる依存性.
→**本研究で導いた式が必要.**

結論

- 任意の(対称型)上準位分布におけるOptical Escape Factor(OEF)の空間分布を求める積分式の導出し，その数値的計算を行った（Otsukaの式の一般化）.
- 上準位密度分布がガウス型のプラズマの周辺部では，OEFのOptical Depth(τ)への依存性が中心と大きく異なり，既存の式で代用できないことが示唆された.

今後の予定

- 任意の上準位分布に対するOEFの計算式をHe IのCRモデルに組込み，線スペクトル強度比法の分布計測への適用を試みる.

  特に,
  - A係数を単純に置き換えてよいか？周辺部では置き換えることは自明ではなくなるかも？
  - ガウス分布に対する簡易的な経験式の導出.

パラメータの整理(Optical Depthと変数の規格化)

- **Optical Depth: τ**

$$\tau = \int_0^L k_{pq}(\rho)d\rho$$

(下準位一様の場合)

$$\left(= k_{pq0}L = \frac{e^2}{4m_e c\varepsilon_0} f_{pq}\lambda_{qp}\sqrt{\frac{M}{2\pi\kappa T_p}} \cdot n_p L \right)$$

k'_{ik0} :吸収係数 [m^{-1}], f_{pq} :吸収振動子強度

λ_{qp} :中心波長 [m], M :原子の質量 [kg]

  - 物理的意味
    - exp(-τ): スペクトル中心の光子が距離Lを吸収されずに進む確率.
    - τ>>1: 光学的に厚い
    - τ<<1: 光学的に薄い

- **半径の規格化**

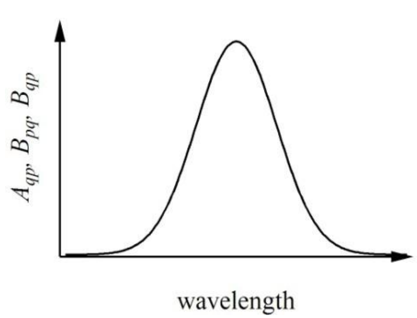
  プラズマの特性長Lで規格化

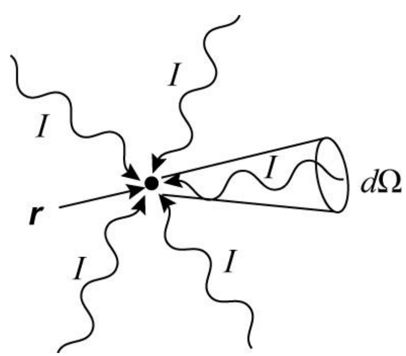
  $R \rightarrow R_N = R/L$

- **波長の規格化**

  スペクトル中心波長で規格化

  $\lambda \rightarrow x = (\lambda-\lambda_{qp})/ \lambda_{qp}$





東京大学
THE UNIVERSITY OF TOKYO

フィッティング式（上準位がGaussianの場合）

$$\Lambda_{\mathrm{G}}(R_{\mathrm{N}},\tau)=\min\left(1, a_0\cdot\frac{a_1-\dfrac{a_2}{1+(a_3\tau)^{a_4}}}{(a_3\tau+a_5)\times(\pi\ln(a_6+a_3\tau))^{a_7}}\right)\times\left(1+p_2(\tau)R_{\mathrm{N}}^2+p_4(\tau)R_{\mathrm{N}}^4+p_6(\tau)R_{\mathrm{N}}^6+p_8(\tau)R_{\mathrm{N}}^8\right)$$

$$p_2(\tau)=\frac{b_0}{1+\exp(-b_1\times(x-b_2))}\times\left(1-\frac{b_3}{1+\exp(-b_4\times(x-b_5))}\right)$$

$$p_4(\tau)=\frac{c_0}{1+\exp(-c_1\times(x-c_2))}\times\left(1-\frac{c_3}{1+\exp(-c_4\times(x-c_5))}\right)\times\left(1-\frac{c_6}{1+\exp(-c_7\times(x-c_8))}\right)$$

$$p_6(\tau)=\frac{d_0}{1+\exp(-d_1\times(x-d_2))}\times\left(1-\frac{d_3}{1+\exp(-d_4\times(x-d_5))}\right)\times\left(1-\frac{d_6}{1+\exp(-d_7\times(x-d_8))}\right)$$

$$p_8(\tau)=\frac{e_0}{1+\exp(-e_1\times(x-e_2))}\times\left(1-\frac{e_3}{1+\exp(-e_4\times(x-e_5))}\right)\times\left(1-\frac{e_6}{1+\exp(-e_7\times(x-e_8))}\right)$$

a_i={1.44207,1.9913,1.27723,1.23408,1.30416,0.624882,1.96663,0.646301}

b_i={-1,2.7284,0.262559,0.488443,1.18894,0.188082}

c_i={-0.24,2.25506,-0.320862,0.8,3.26183,0.304947,0.236734,0.947825,0.0352149}

d_i={0.05,2.32589,-0.624264,0.9,5.31904,0.0617265,0.148792,1.02698,0.703395}

e_i={-0.024,2.25563,-0.440887,0.8,4.38547,0.138581,0.112333,0.998067,1.15421}

フィッティング式と積分結果の比較