

# ダイバータ付きタンデムミラーにおける rigid モードの安定性解析

- ・研究背景
- ・現在のGAMMA10 とダイバータ付きへの改良
- ・交換型不安定性とは
- ・近軸近似
- ・計算結果
- ・まとめ

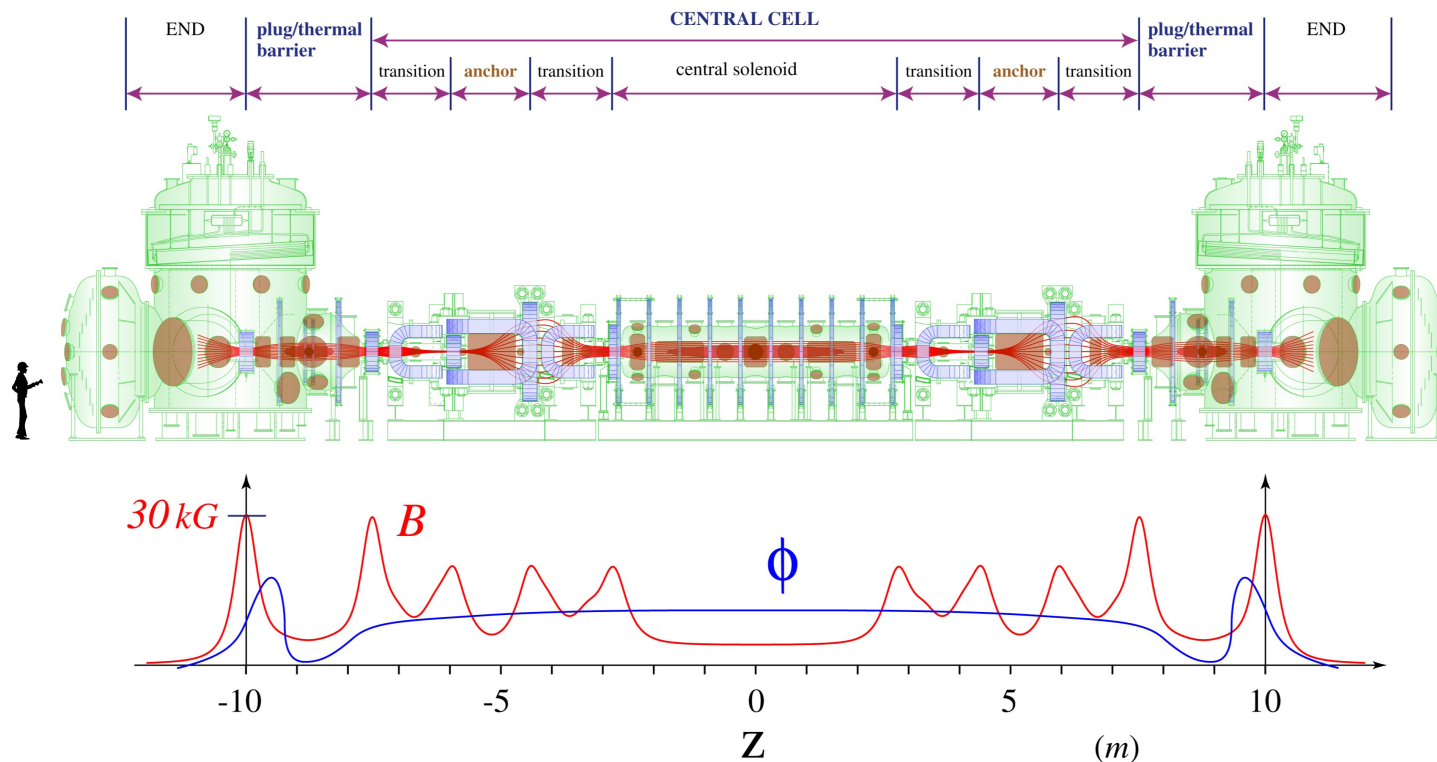
筑波大学プラズマ研究センター

八木厚太郎

# 背景

現在、プラズマ研究センターで用いている実験装置タンデムミラーGAMMA10では良い磁力線曲率を持った**非軸対称ミラー磁場**と**軸対称ミラー磁場**の組み合わせによって巨視的安定性を確保している

GAMMA10 side view



Major objects of GAMMA10 are to demonstrate the formation of an ion confining electrostatic potential (plug potential) and to demonstrate the improvement of an ion axial confinement by the plug potential.

しかし非軸対称磁場は新古典拡散による**径方向損失**を増大させる効果を持っている



巨視的安定性を確保しつつGAMMA10を完全軸対称化することが望ましい

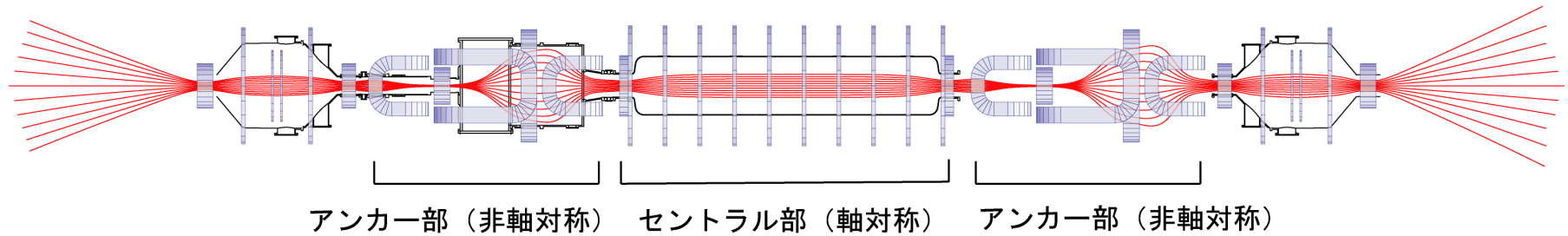


GAMMA10のダイバータ磁場配位導入計画

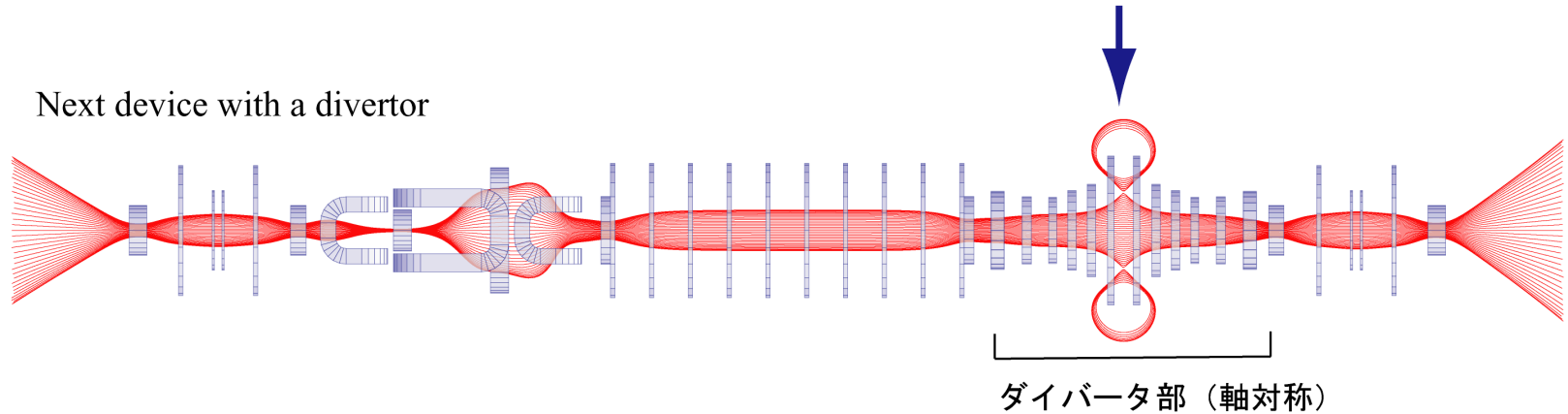
本研究の目的は、現在のGAMMA10と改良後についてMHD不安定性であるrigidモード不安定性の安定性解析を行い安定性境界を明らかにし、比較・考察することである。

# GAMMA10のダイバータ付きへの改良

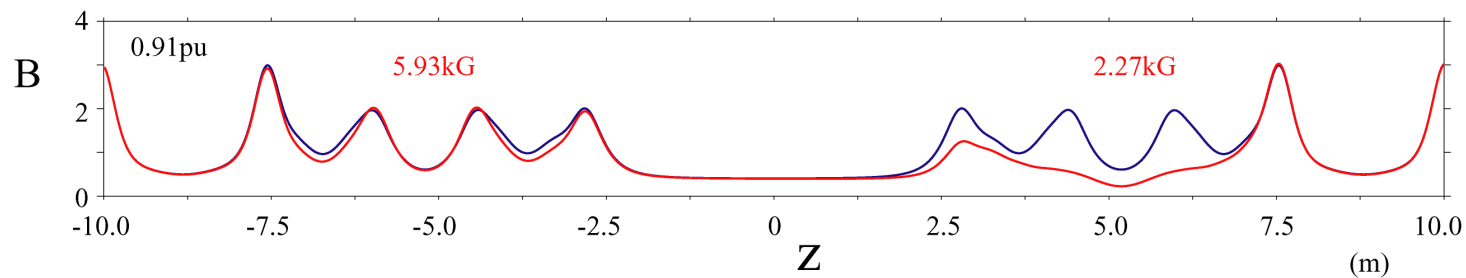
Present GAMMA standard magnetic field



Next device with a divertor



z軸上における磁場強度分布



# 交換型不安定性とは

プラズマが平衡状態のとき各プラズマ要素について  
遠心力と周囲からのプラズマの圧力は  
つり合っている

ここでプラズマ要素とプラズマを囲む真空要素が交換されると仮定する

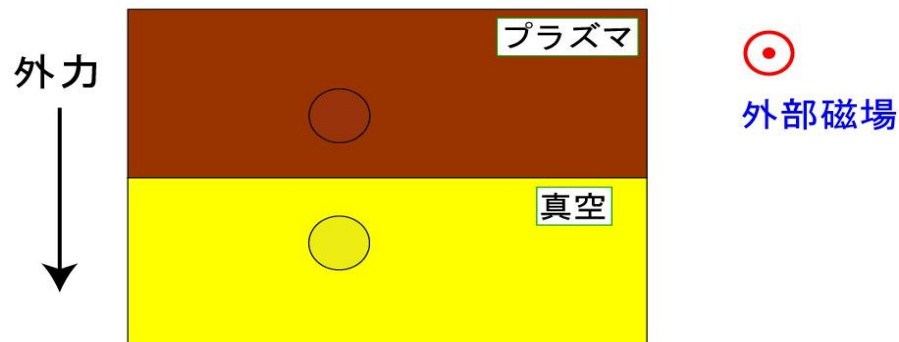
右の図のように外力がプラズマから離れる方向に働いていると攪乱はますます大きくなってしまふ

これを交換型不安定性と呼ぶ

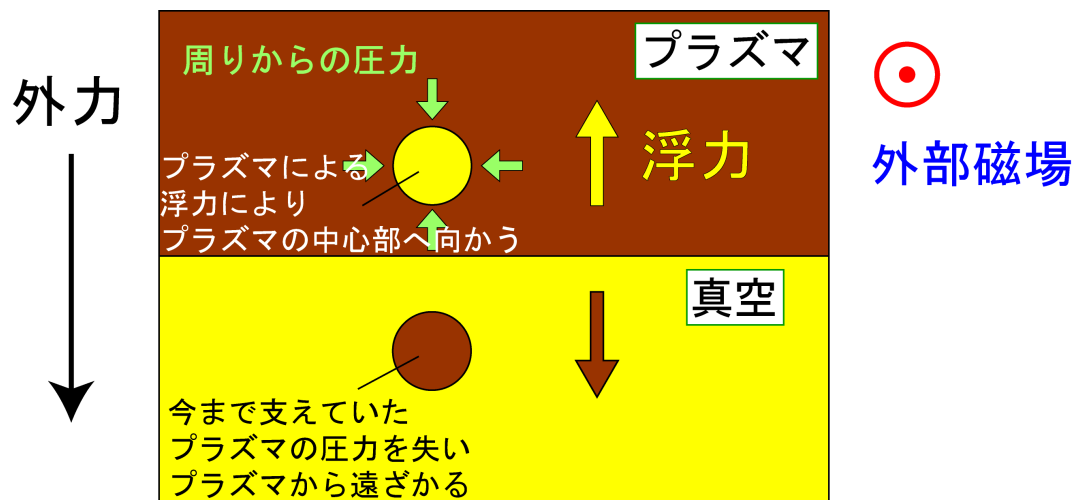
遠心力の向きから磁力線が

プラズマの外に凸 → 不安定  
プラズマの内に凸 → 安定

● 交換不安定性（フルート不安定性）  
（レイリー・テラー不安定性）



外力 = 遠心力  $\propto$  プラズマ圧力



# 今回計算したものの

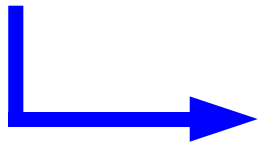
本研究では**近軸近似**を用いて軸近傍について安定性解析を行った。

以下が実際に計算したものである。

- ・磁力線の式…近軸近似による**変数分離**(解析が容易になる)
- ・磁力線曲率…近軸近似による**変数分離**(解析が容易になる)  
フルート安定性解析に**重要なパラメータ**
- ・圧力モデル…今回用いた装置内の圧力分布のモデル
- ・安定性境界…本研究の目的

# 近軸近似

GAMMA10アンカー一部では互いに90度だけ軸まわりに回転した四重極磁場を形成している

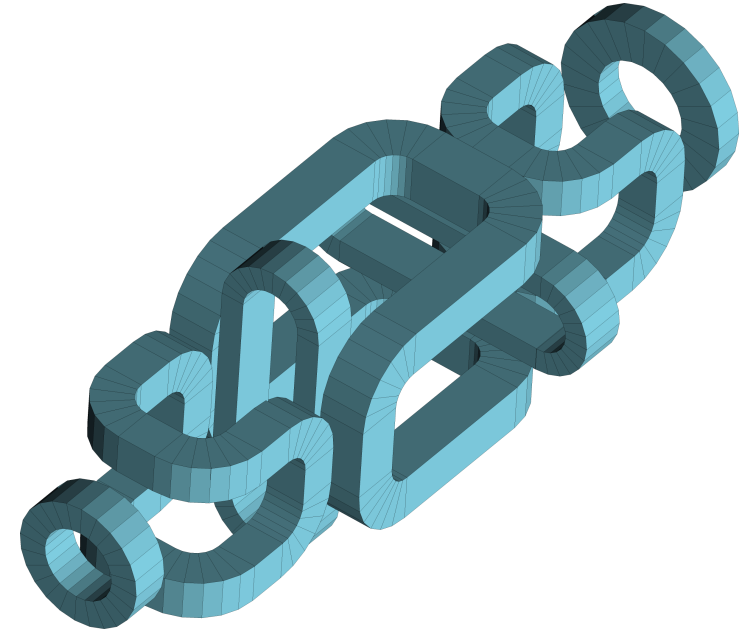


$$\begin{aligned}x &\rightarrow y \\ y &\rightarrow -x \\ z &\rightarrow -z\end{aligned}$$

の対称性

この対称性を利用して近軸近似を用いると

プラズマの各パラメータは**変数分離**された形になる



GAMMA10の非軸対称部

今回の安定性解析では近軸近似を用いて以下のようにオーダリングを行い、 $O(\epsilon^2)$ までのオーダーを考慮した

$$\frac{B_x}{B} \simeq O(\epsilon), \quad \frac{B_y}{B} \simeq O(\epsilon), \quad \frac{B_z}{B} \simeq O(1)$$

# $(\psi, \theta, z)$ 座標系

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  より

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\psi \nabla \theta) = \nabla \psi \times \nabla \theta$$

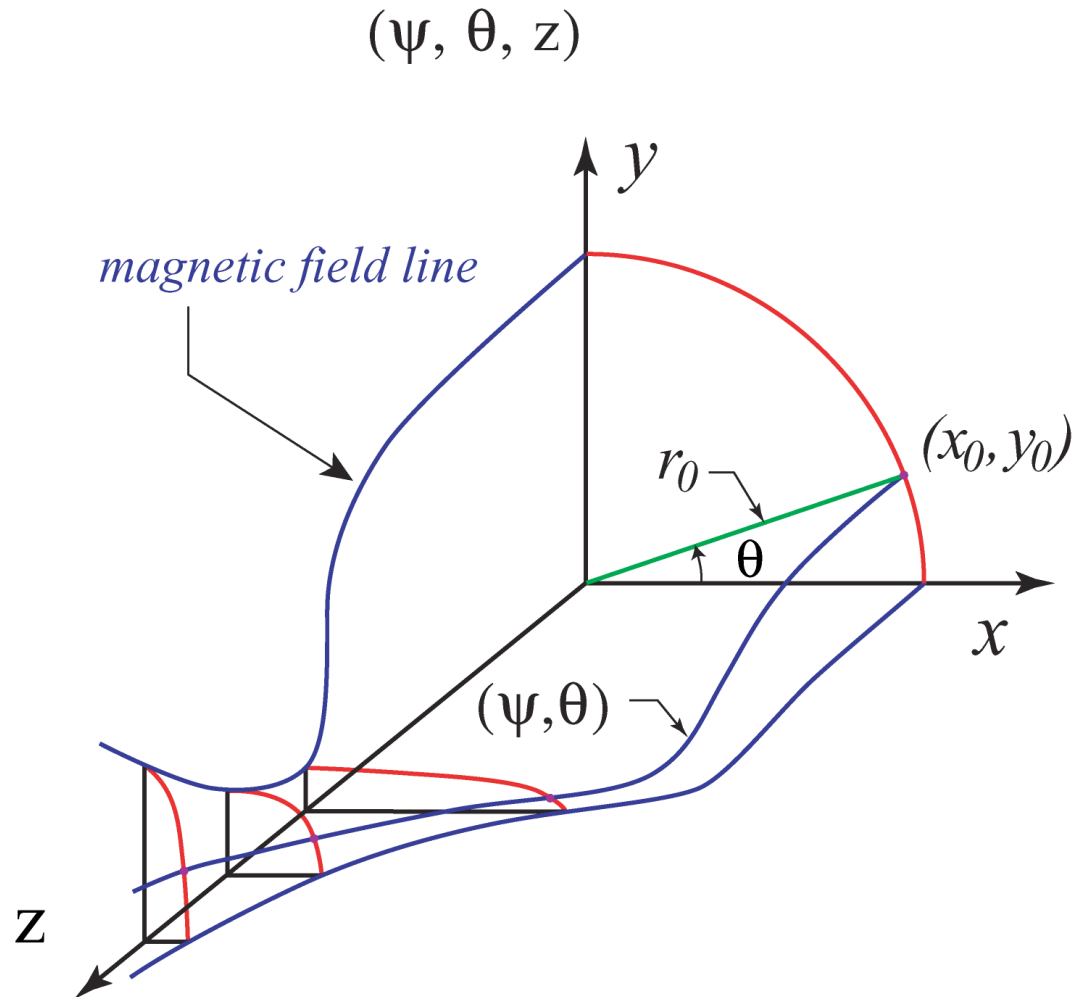
$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = \mathbf{B} \cdot \nabla \theta = 0$$

となるような $\psi, \theta$ をとる

$\theta$ は $z=0$ における方位角

$\psi$ は $z=0$ において

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{で定義する}$$





# 磁力線の式

磁力線の式は  $\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}$  で表され、本来(x,y,z)の関数であるが近軸近似を用いると

軸近傍について以下のように変数分離された形で表され、解析が容易になる

$$x(z) = \sigma(z)x_0$$

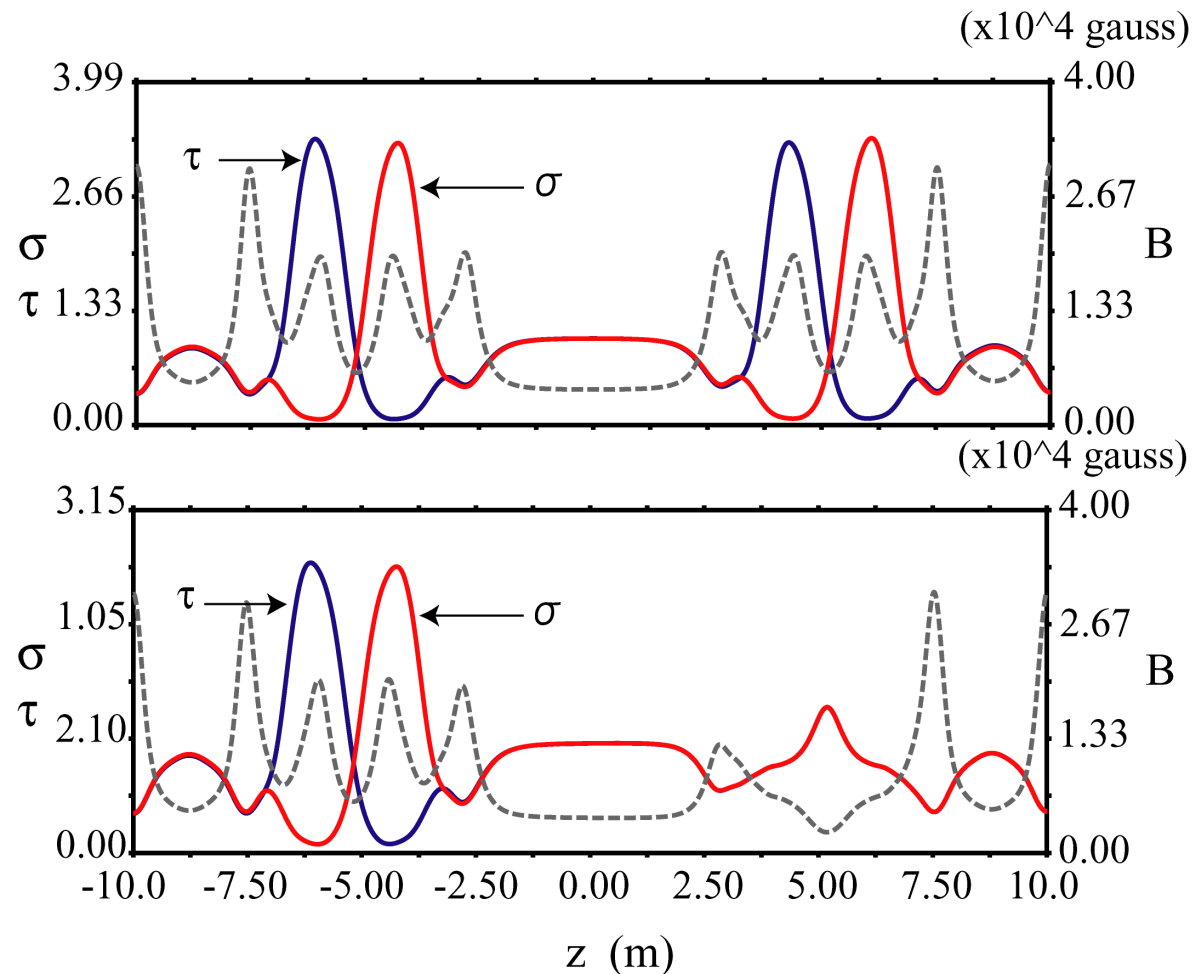
$$y(z) = \tau(z)y_0$$

$$\sigma(0) = \tau(0) = 1, \sigma(-z) = \tau(z)$$

$\sigma, \tau$  を実験装置について決定すると

$x_0, y_0$  を与えればz方向の磁力線形状を

得ることができる



右図が計算結果

上: GAMMA10

下: ダイバータ付きGAMMA10

# 磁力線曲率

磁力線曲率を  $\kappa \equiv \hat{e}_{\parallel} \cdot \nabla \hat{e}_{\parallel} = -\hat{e}_{\parallel} \times (\nabla \times \hat{e}_{\parallel})$  と定義される

( $\psi, \theta, z$ )座標系を用いて近軸近似を用いると磁力線曲率は以下のように表される

$$\kappa = \kappa_{\psi} \nabla \psi + \kappa_{\theta} \nabla \theta$$

$$\kappa_{\theta}(\psi, \theta, z) = \hat{\kappa}_{\theta}(z) \psi \sin 2\theta$$

$$\kappa_{\psi}(\psi, \theta, z) = \frac{1}{2} \hat{\kappa}_{\psi}(z) - \frac{1}{2} \hat{\kappa}_{\theta}(z) \cos 2\theta$$

$$\hat{\kappa}_{\psi}(z) = r_0^2 \left[ \sigma(z) \frac{d^2 \sigma(z)}{dz^2} + \tau(z) \frac{d^2 \tau(z)}{dz^2} \right]$$

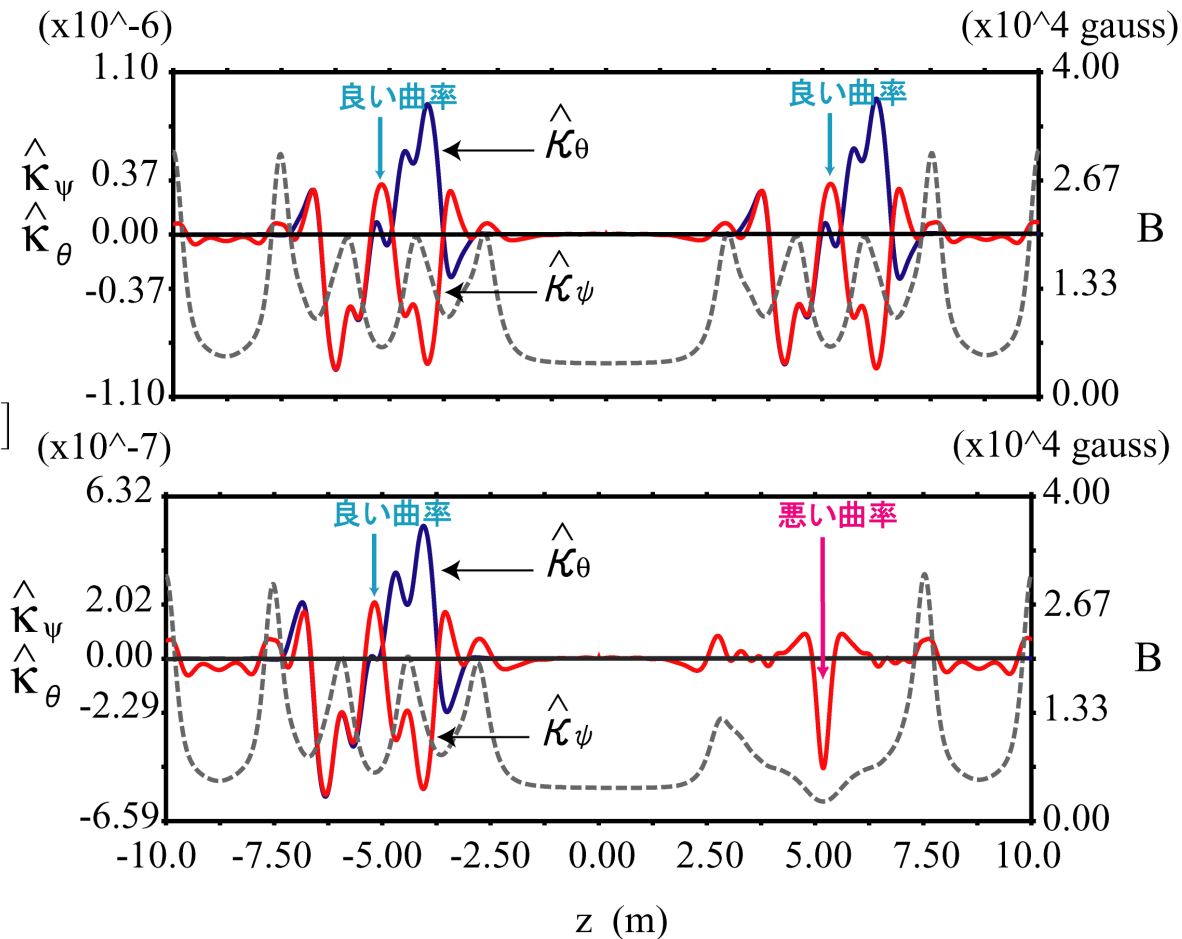
$$\hat{\kappa}_{\theta}(z) = -r_0^2 \left[ \sigma(z) \frac{d^2 \sigma(z)}{dz^2} - \tau(z) \frac{d^2 \tau(z)}{dz^2} \right]$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{2\psi}{B(z=0)}}$$

交換型モードについて

$\kappa_{\psi} > 0$  → 良い曲率

$\kappa_{\psi} < 0$  → 悪い曲率



であり、アンカー部は良い曲率  
ダイバータ部は悪い曲率を持つことがわかる

# 圧力モデル

プラズマの圧力平衡は

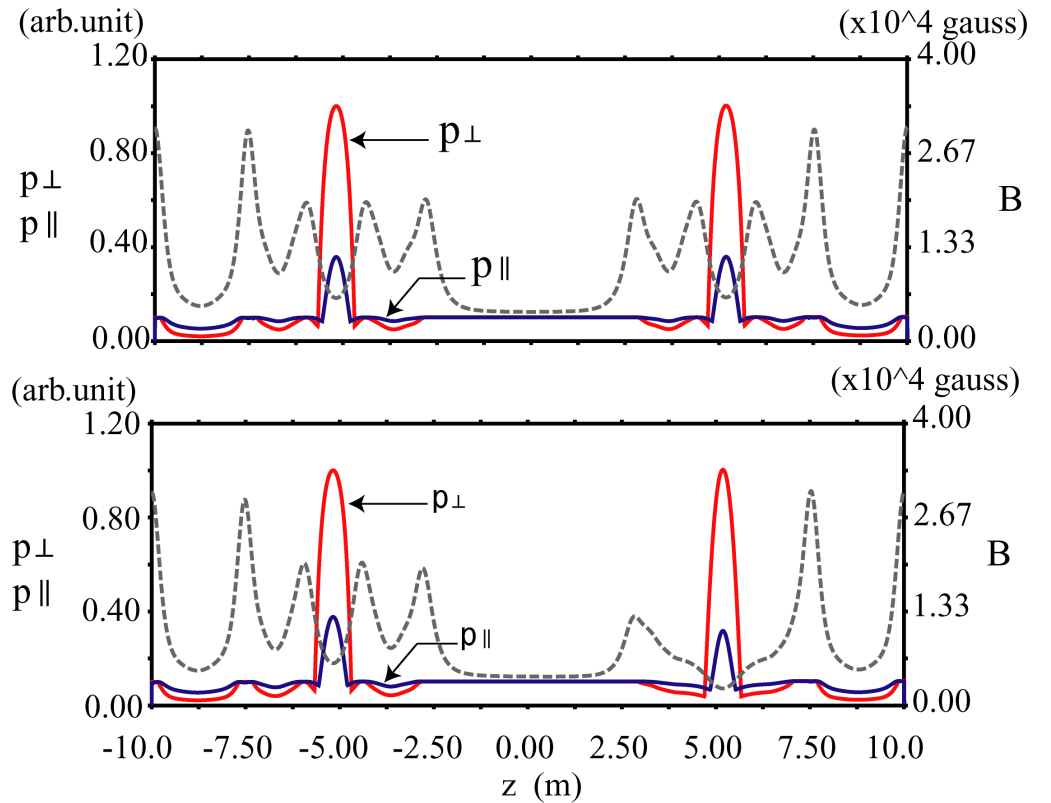
$$\frac{j}{c} \times B - \nabla \cdot P = 0 \quad (\text{力のつりあい})$$

圧力の非等方性を考慮して  
磁力線に垂直成分と平行成分に分けると  
以下のようなになる

$$Q \equiv \frac{B^2}{4\pi} + P_{\perp} - P_{\parallel} \quad \text{として}$$

$$\nabla_{\perp} \left( P_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = Q \kappa$$

$$\nabla_{\parallel} \left( P_{\perp} + \frac{B^2}{8\pi} \right) = B \nabla_{\parallel} \left( \frac{Q}{B} \right)$$



外部加熱系により  $P_{\perp}$  は決まり、 $P_{\parallel}$  は平衡条件により求まる

・**セントラル部**: マクスウェル分布  
( $B$ に依存しない)

$$p_{\perp, \parallel}(B) = p_0$$

・**アンカー部、ダイバータ部**:  $B$ が極小値をもつとき圧力最大

$$p_{\perp}(B) = p_t \frac{B_m^2 - B^2}{B_m^2 - B_c^2}$$

・**その他の領域**では磁場強度が減少するとき圧力も減少  
(圧力は磁力管断面積に反比例)

$$p_{\perp}(B) = p_0 \frac{B}{B_m}$$

# ハミルトンの原理による基礎方程式の導出

Hamilton's Principle

$$\delta \int dt (T - W) = 0$$

Kinetic energy

$$T = \frac{1}{2} \int d^3x \rho |\dot{\xi}|^2$$

Potential energy

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \left[ \frac{1}{B^4} Q |\delta \mathbf{B} \times \mathbf{B}|^2 + (\xi \cdot \nabla Q)(\xi \cdot \kappa) - \frac{4\pi}{c} \frac{1}{B^4} Q (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B})(\delta \mathbf{B} \cdot \xi \times \mathbf{B}) \right]$$

field line bending

ballooning/  
interchange drive

kink drive

ここで

$$Q \equiv \frac{1}{4\pi} B^2 + p_{\perp} - p_{\parallel}, \quad \delta \mathbf{B} \equiv \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}), \quad \kappa \equiv \hat{e}_{\parallel} \cdot \nabla \hat{e}_{\parallel}$$

あらゆる可能な変位について  $W > 0$  ならば系は安定となる。

# 基礎方程式

リジッドモード不安定性については、以下の基礎方程式が立ち  $\omega^2 > 0$  ならば安定である。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{\langle\langle Q \rangle\rangle}{B} \sigma^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] + \omega^2 \left[ -\frac{\langle\langle \rho \rangle\rangle}{B} \sigma^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] - \frac{\langle\langle p_{\perp} + p_{\parallel} \rangle\rangle}{B} \sigma \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$$

$$\langle\langle A \rangle\rangle \equiv \frac{1}{\psi_{\omega}} \int_0^{\psi_{\omega}} A d\psi$$

境界条件

エンドプレートにおいて  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$  (電場  $E=0$ )

二分法を用いて  $\omega=0$  となる安定境界を求めた

# GAMMA10の安定境界

GAMMA10における  
セントラル部に対するアンカー部の安定境界

圧力の指標として $\beta$ 値という磁気圧に対する圧力の比を用いている

$$\beta = \frac{p}{B_c^2 / 8\pi}$$

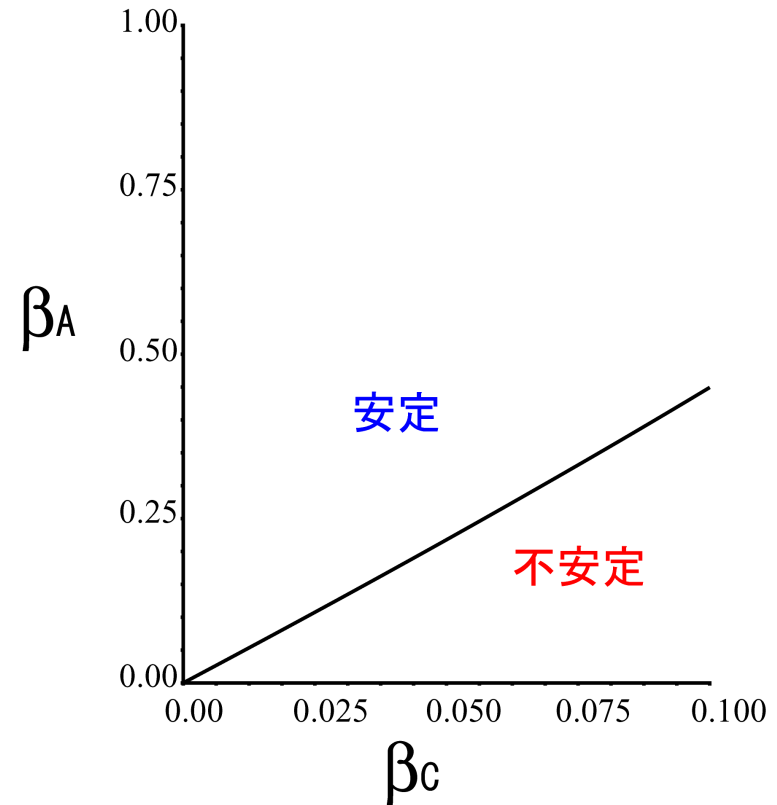
( $B_c$  はセントラル部の磁場強度)

セントラル部の圧力に対してアンカー部の圧力は

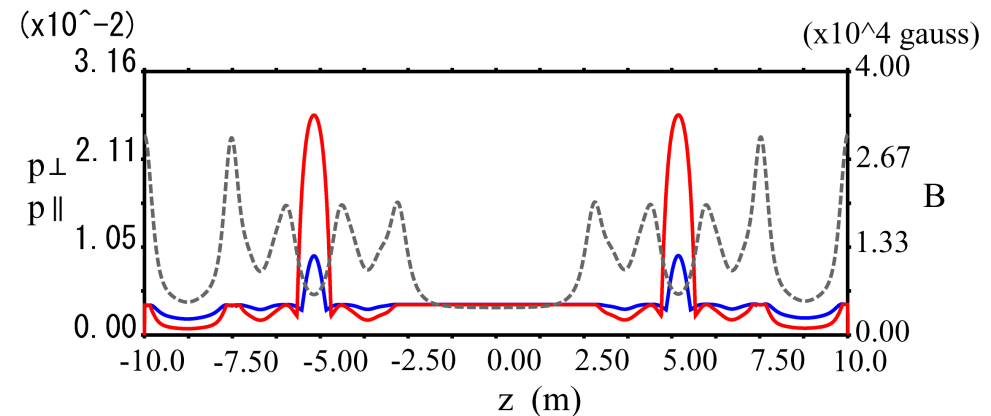
$$\beta_A > 4.5 \beta_c$$

と約4.5倍以上の圧力が必要であることがわかる

セントラル部 $\beta_c$  に対するアンカー部 $\beta_A$  の安定境界



$\beta_c = 0.01$ のときの安定境界における圧力分布



# ダイバータ付きGAMMA10における安定境界

ダイバータ付きGAMMA10におけるダイバータ部に対するアンカー部の圧力境界  
 圧力分布の図は $\beta_D = 0.02$  のときのもの

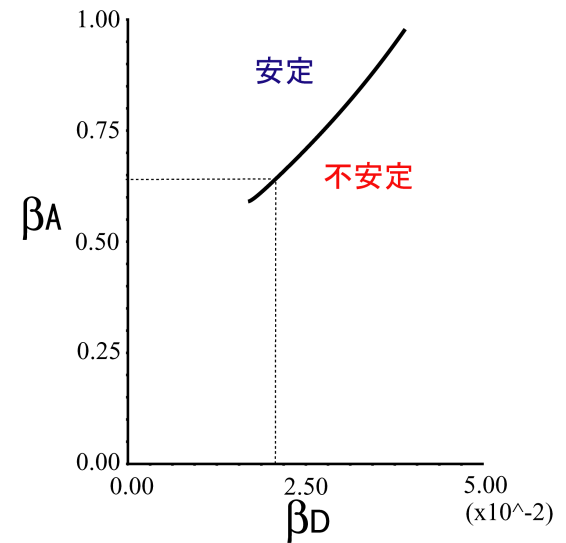
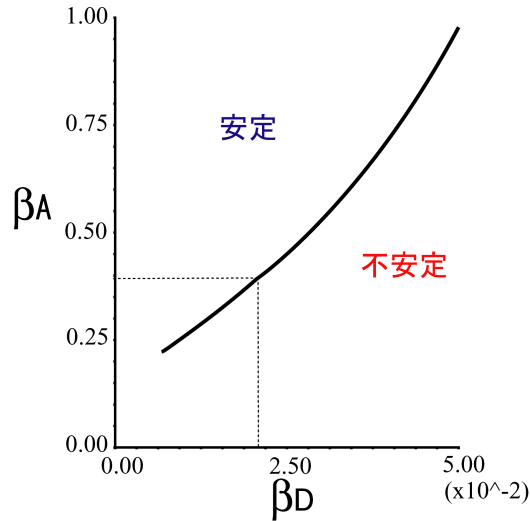
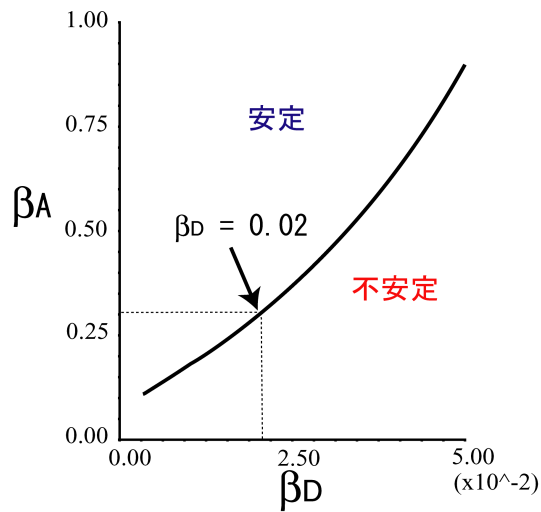
ダイバータ部の圧力に対してアンカー部では約15~30倍程度の大きな圧力が必要であることがわかる

$\beta_C = 0.01$

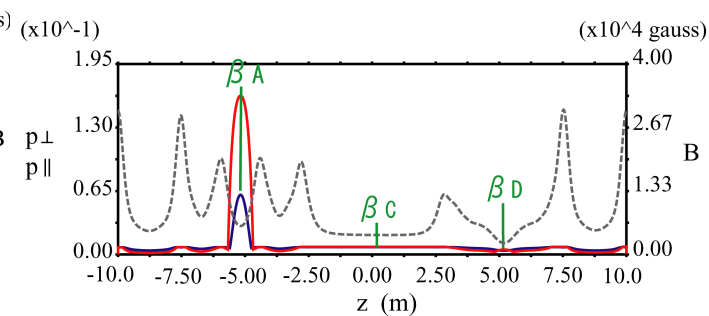
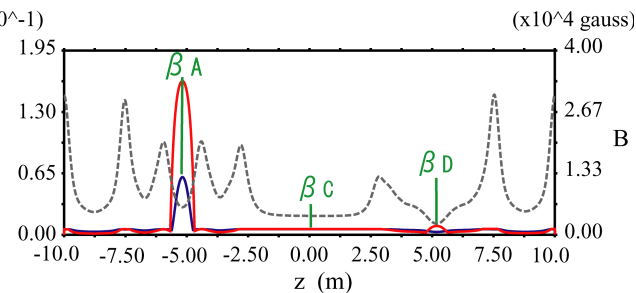
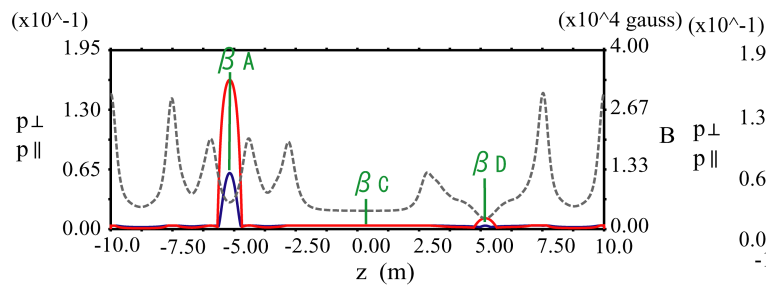
$\beta_C = 0.02$

$\beta_C = 0.05$

ダイバータ部 $\beta_D$  に対するアンカー部 $\beta_A$  の安定境界



$\beta_D = 0.02$ のときの安定境界における圧力分布



# まとめ

- 今回の研究ではGAMMA10、ダイバータ付きGAMMA10の軸近傍におけるrigidモードの安定性解析を行う計算コードを開発し、セントラル部、ダイバータ部の圧力を安定に保つためにアンカー部ではどの程度の圧力が必要になるかという安定境界を求めた
- **悪い曲率を持つダイバータ部**の圧力を維持するためにはアンカー部の圧力を**約15～30倍程度に大きくする**必要があることがわかった
- 今後の展望として軸近傍ではない良い磁力線曲率を持ったセパラトリックス近傍を含む領域での安定性解析、また今回はダイバータ部の軸方向圧力分布はアンカー部と同じにしたが、独立したダイバータ部の圧力モデルを考え直すことなどが考えられる





# 近軸近似

今回の安定性解析では近軸近似を用いて以下のようにオーダリングを行い、 $O(\epsilon^2)$  までのオーダーを考慮した

$$\frac{B_x}{B} \simeq O(\epsilon), \quad \frac{B_y}{B} \simeq O(\epsilon), \quad \frac{B_z}{B} \simeq O(1)$$

$$\hat{e}_{\parallel} = \hat{e}_x \frac{B_x}{B} + \hat{e}_y \frac{B_y}{B} + \hat{e}_z \frac{B_z}{B}, \quad \nabla l = \frac{\mathbf{B}}{B_l} = \hat{e}_x \frac{B_x}{B_l} + \hat{e}_y \frac{B_y}{B_l} + \hat{e}_z \frac{B_z}{B_l}$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \simeq dz \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 \right) = dz \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{B_x}{B_z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{B_y}{B_z} \right)^2 \right)$$

$$B_l = B_z \frac{dl}{dz} \simeq B_z \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{B_x}{B_z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{B_y}{B_z} \right)^2 \right) = B_z + O(\epsilon^2)$$

$$B = B_z + O(\epsilon^2), \quad \hat{e}_{\parallel} \cdot \nabla l = 1 + O(\epsilon^2)$$

# $(\psi, \theta, z)$ 座標系

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  より

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\psi \nabla \theta) = \nabla \psi \times \nabla \theta$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = \mathbf{B} \cdot \nabla \theta = 0$$

となるような $\psi, \theta$ をとる

$\theta$ は $z=0$ における方位角

$\psi$ は $z=0$ において

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{で定義する}$$

