

擬似Radial Basis Functionを用いた トカマクプラズマ電流密度分布逆解析の検討

Provisional Study on Quasi-Radial Basis Functions Applied to
Reconstruction of Tokamak Plasma Current Density Profile

高橋翼, 板垣正文¹⁾, 松本裕¹⁾

北海道大学工学部, ¹⁾北海道大学大学院工学研究科

• 背景

- トカマク装置ではプラズマ電流密度分布はプラズマ閉じ込め性能に影響
- 核融合プラズマは超高温, プラズマに直接測定機器をおけない
プラズマ電流密度分布を知るために外部センサー信号から逆解析する
- これまでの研究
Grad-Shafranov方程式に含まれる電流密度を多項式で近似し
境界要素法を用いる^[1]
Parabolic型電流密度分布 ○
Hollow型, Broad型, Peaked型電流密度分布 ×

• 目的

近似関数として擬似Radial Basis Function (RBF)を用いた逆解析

[1] M. Itagaki et al., *Nucl. Fusion*, **45**, 153 (2005).

電流密度の擬似RBFによる近似

Grad-Shafranov方程式
$$-\Delta^* \psi = - \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right\} = \mu_0 r j_\phi$$

(ψ は磁束関数)

電流密度のトロイダル成分 j_ϕ を
基底関数 f_k と未知の重み係数 w_k で近似
$$\mu_0 r j_\phi = \sum_k w_k f_k(r, z)$$

基底関数 : 擬似Radial Basis Function (RBF)

$$f_k(r, z) = \frac{2}{\sigma_k^2} \left(1 + \frac{r_k}{r} - 2 \frac{(r - r_k)^2 + (z - z_k)^2}{\sigma_k^2} \right) \exp \left(- \frac{(r - r_k)^2 + (z - z_k)^2}{\sigma_k^2} \right)$$

※ (r_k, z_k) は各擬似RBF f_k によって異なる定点(中心) $\sigma_k = 1.0$

- 擬似RBFを使う理由
- 重み係数 w_k を求める方法

“擬似”RBFを使う理由

RBFの一種: Gauss関数 $\exp\left(-\frac{(r-r_k)^2 + (z-z_k)^2}{\sigma_k^2}\right)$

※本解析ではGauss関数そのものを基底関数として用いることはできない

Grad-Shafranov方程式から境界積分方程式への変換(後述)のとき,

$$-\left\{r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} \varphi^{(k)} = f_k \quad \text{を満たす特解 } \varphi^{(k)} \text{ が必要}$$

Gauss関数を基底関数 f_k とした場合, 特解を解析的に求めることが困難

逆にGauss関数を特解とする

$$\begin{aligned} f_k &= -\left\{r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} \exp\left(-\frac{(r-r_k)^2 + (z-z_k)^2}{\sigma_k^2}\right) \\ &= \frac{2}{\sigma_k^2} \left(1 + \frac{r_k}{r} - 2 \frac{(r-r_k)^2 + (z-z_k)^2}{\sigma_k^2}\right) \exp\left(-\frac{(r-r_k)^2 + (z-z_k)^2}{\sigma_k^2}\right) \cdots \text{基底関数} \end{aligned}$$

擬似Radial Basis Function

各基底関数の重み係数 w_k の求め方

Grad-Shafranov方程式



プラズマ境界上の境界積分方程式 (i は境界要素の節点上にとる)

$$c_i \psi_i - \int_{\Gamma} \left(\frac{\psi_i^*}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{r} \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma = \sum_k w_k \left\{ c_i \varphi_i^{(k)} - \int_{\Gamma} \left(\frac{\psi_i^*}{r} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial n} - \frac{\varphi^{(k)}}{r} \frac{\partial \psi_i^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right\}$$

ψ_i^* 基本解 $\varphi^{(k)}$ 特解 } 解析的に与えられる

プラズマ境界 Γ } Cauchy条件面法(外部センサー信号
 Γ 上の磁束 ψ と法線方向微分 $\partial\psi/\partial n$ から逆推定する手法)から求められる

境界積分を離散化



重み係数 w_k についての連立1次方程式

物理的に意味のある解を得るために

重み係数 w_k についての他の拘束条件を追加する

重み係数 w_k の拘束条件(1)

電流密度値を直接に与える条件

電流密度を与える点の位置 (r_i, z_i)

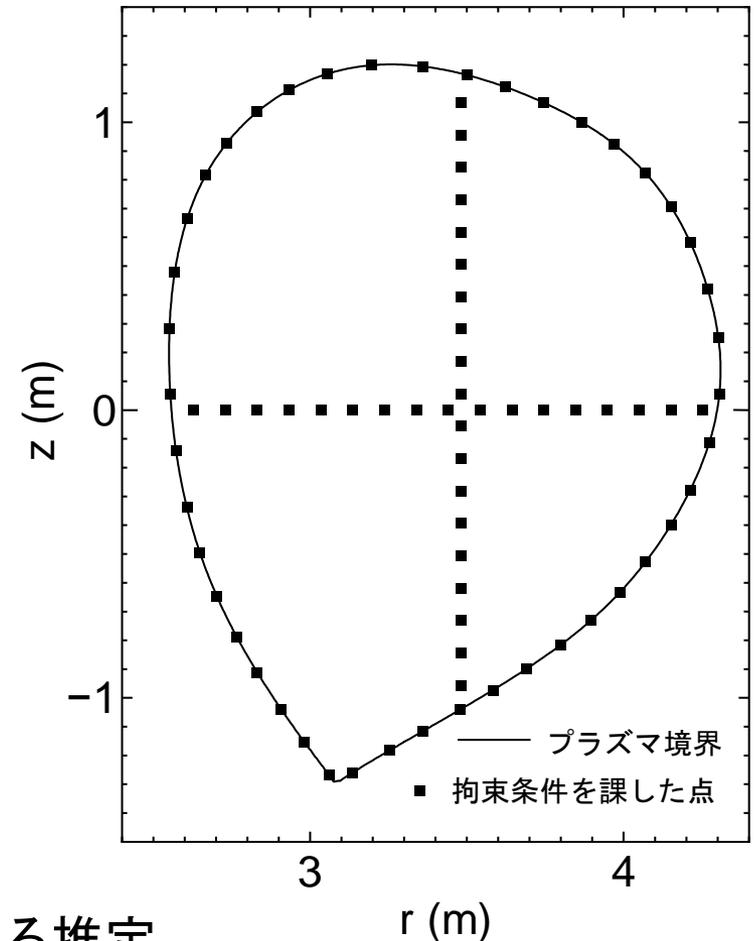
(r_i, z_i) での電流密度値 $j_{\phi i}$

$$\mu_0 r_i j_{\phi i} = \sum_k w_k f_k(r_i, z_i)$$

- プラズマ境界上で電流密度は0
(境界節点上で考慮)
- プラズマ内部の数点で電流密度が
既知であると仮定
(主半径方向, 中心軸方向)

理論的な裏付け: 運動的Stark効果(MSE)による推定

トカマクのポロイダル断面



重み係数 w_k の拘束条件(2)

MHD平衡を課す条件(準備)

平衡の式に基づく磁気面関数を用意

平衡の式 $\nabla P = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$

$$\frac{r^3}{B_r} \left\{ B_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{j_\phi}{r} \right) + B_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{j_\phi}{r} \right) \right\} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{d}{d\psi} (rB_\phi)^2$$

$$\sum_k w_k \left(-2f_k + r \frac{\partial f_k}{\partial r} + r \frac{B_z}{B_r} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right) = -\frac{d}{d\psi} (rB_\phi)^2$$

磁気面関数 (ψ のみの関数)

電流密度の近似式

$$j_\phi = \frac{1}{\mu_0 r} \sum_k w_k f_k(r, z)$$

$$S(\psi) = \sum_k w_k S_k(r, z) \equiv \sum_k w_k \left(-2f_k + r \frac{\partial f_k}{\partial r} + r \frac{B_z}{B_r} \frac{\partial f_k}{\partial z} \right)$$

$S(\psi)$ が磁気面関数であることから w_k の拘束条件が導ける

重み係数 w_k の拘束条件(2)

MHD平衡を課す条件(1)

- ψ の等高線上の2点で
 $S(\psi) \left(= \sum_k w_k S_k(r, z) \right)$ の値は等しい

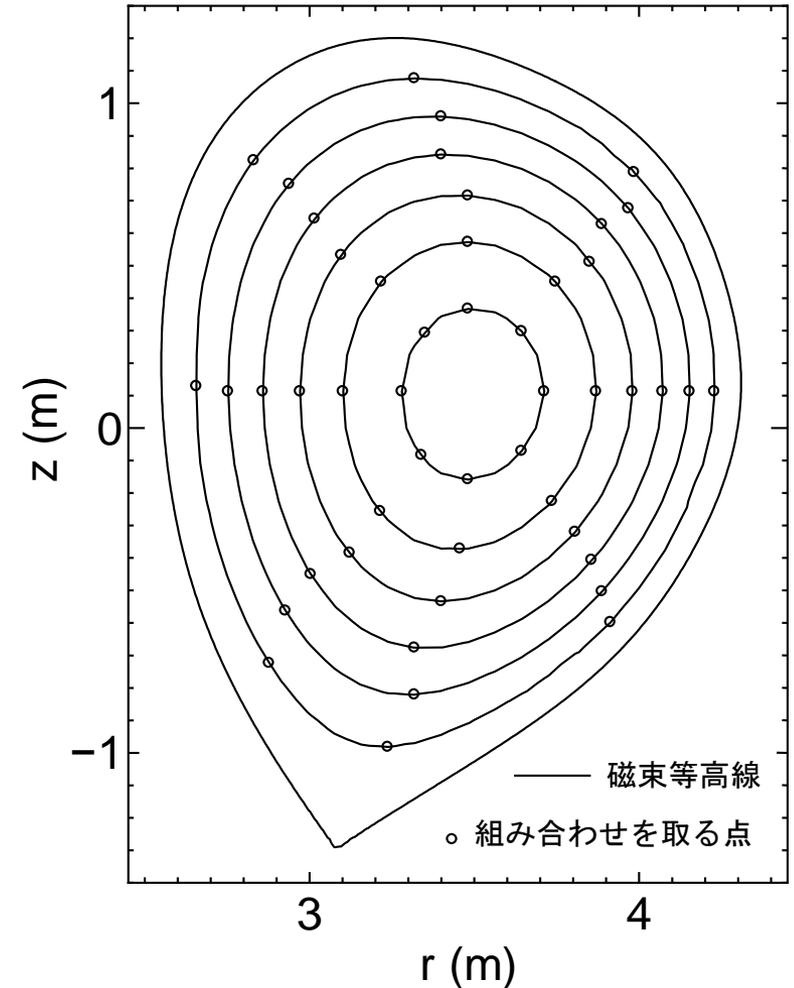
ψ の等高線上の2点 (r_p, z_p) , (r_q, z_q)

$$\sum_k w_k [S_k(r_p, z_p) - S_k(r_q, z_q)] = 0$$

手順

1. ψ の等高線を求める
2. 各等高線上に8点取る
3. 8点から2点を取る組み合わせすべてについて条件を計算する

トカマクのポロイダル断面



重み係数 w_k の拘束条件(2)

MHD平衡を課す条件(2)

- $S(\psi)$ の, ψ の等高線に沿う方向の微分係数は0

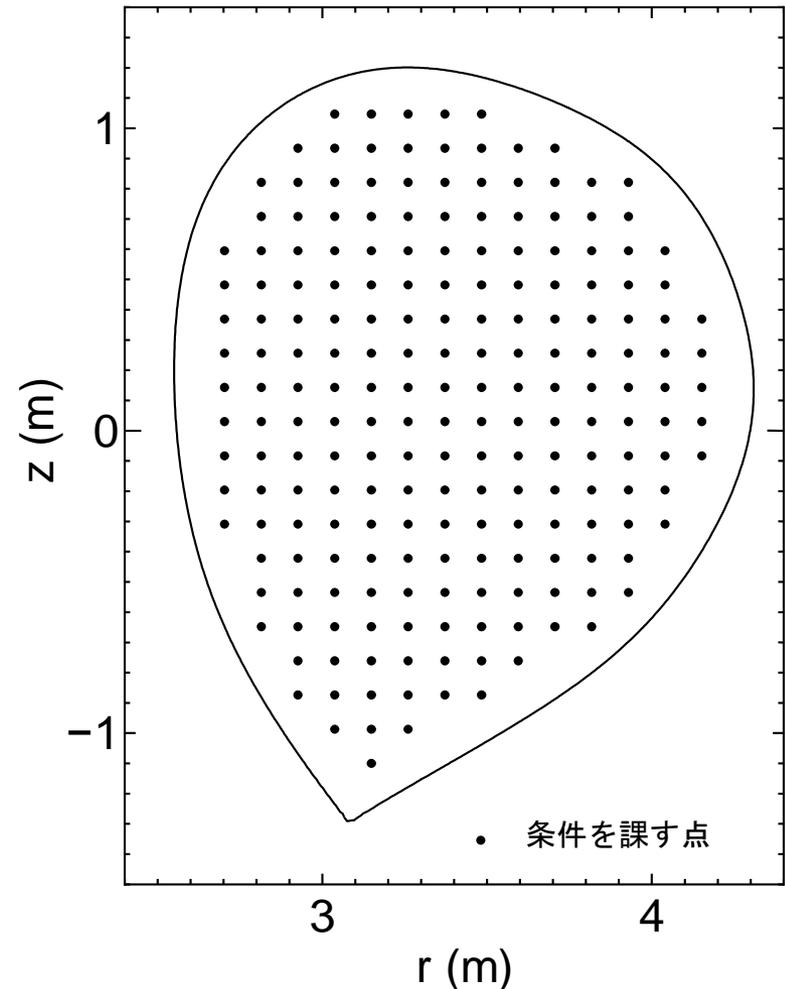
$$\mathbf{t} \cdot \nabla S = \sum_k w_k \mathbf{t} \cdot \nabla S_k = 0$$

\mathbf{t} ↑
ψ = const
 \mathbf{t} : 等高線に沿う単位接線方向ベクトル

手順

1. この条件を課す点の位置を決める
2. その点での \mathbf{t} を求める
3. \mathbf{t} 方向で S_k の前進差分を計算

トカマクのポロイダル断面



重み係数 w_k の決定

境界積分方程式と他の拘束条件を連立

$$\begin{pmatrix} \text{Grad-Shafranov方程式に基づく} \\ \text{境界積分方程式} \\ \text{電流密度値を直接与える拘束条件} \\ \text{MHD平衡を課す拘束条件} \end{pmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{g}$$

D \mathbf{w} $=$ \mathbf{g}

特異値分解法によって解く

$$D = U \Lambda V^T$$

数値的に安定した解を得るために
チホノフの正則化を導入

$$\mathbf{w} = V (\Lambda^T \Lambda + \gamma \mathbf{I})^{-1} \Lambda^T U^T \mathbf{g}$$

γ : チホノフの正則化定数

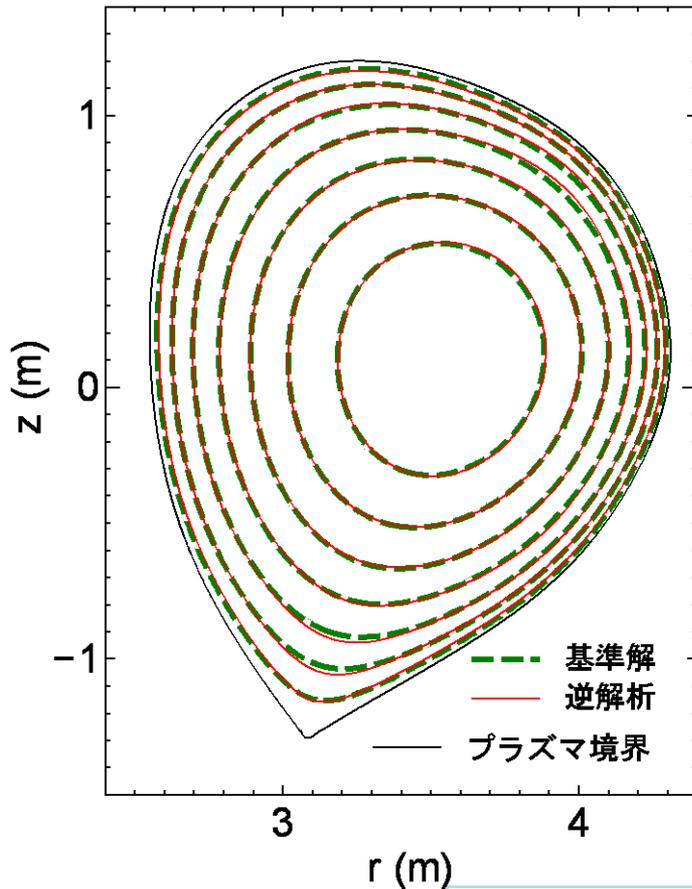
w_k が決定すれば $\mu_0 r j_\phi = \sum_k w_k f_k(r, z)$ から任意の点で電流密度を求められる

逆解析結果 (JT-60U)

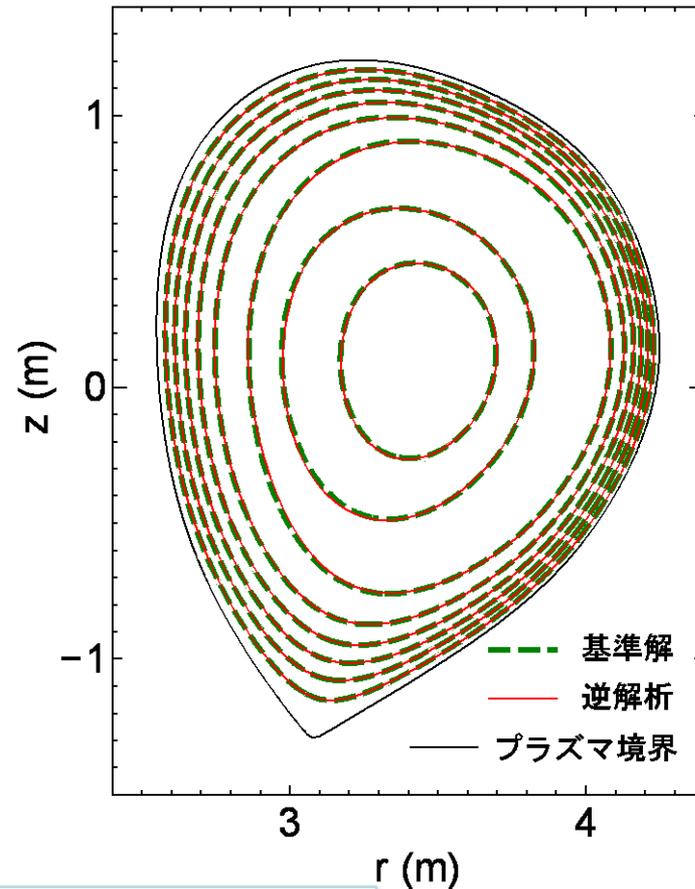
ポロイダル断面での電流密度 j_ϕ の等高線

基準解: 平衡計算コード
SELENEによる結果

Parabolic型



Hollow型

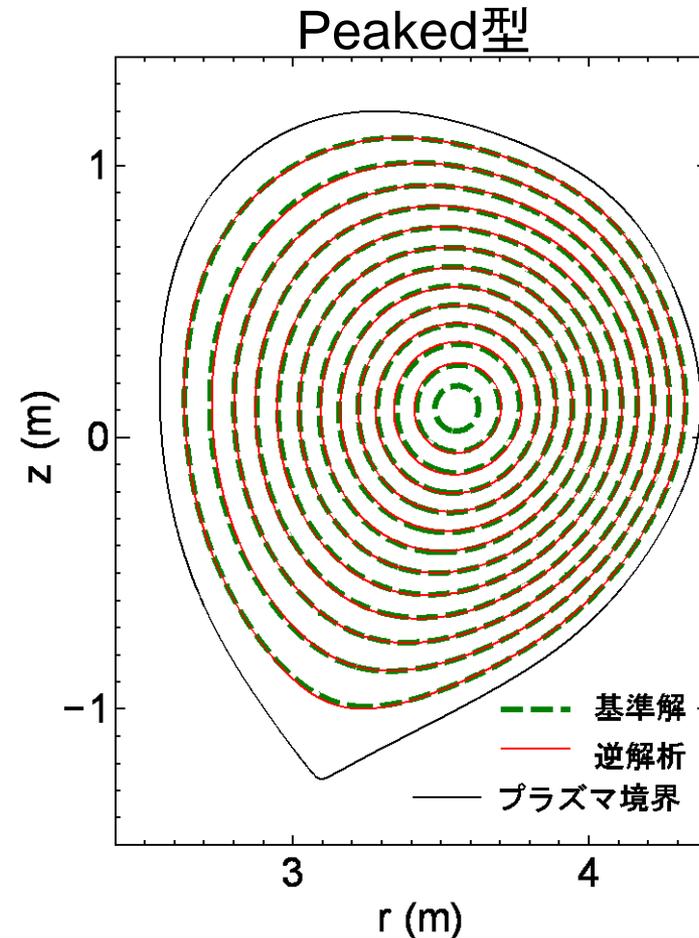
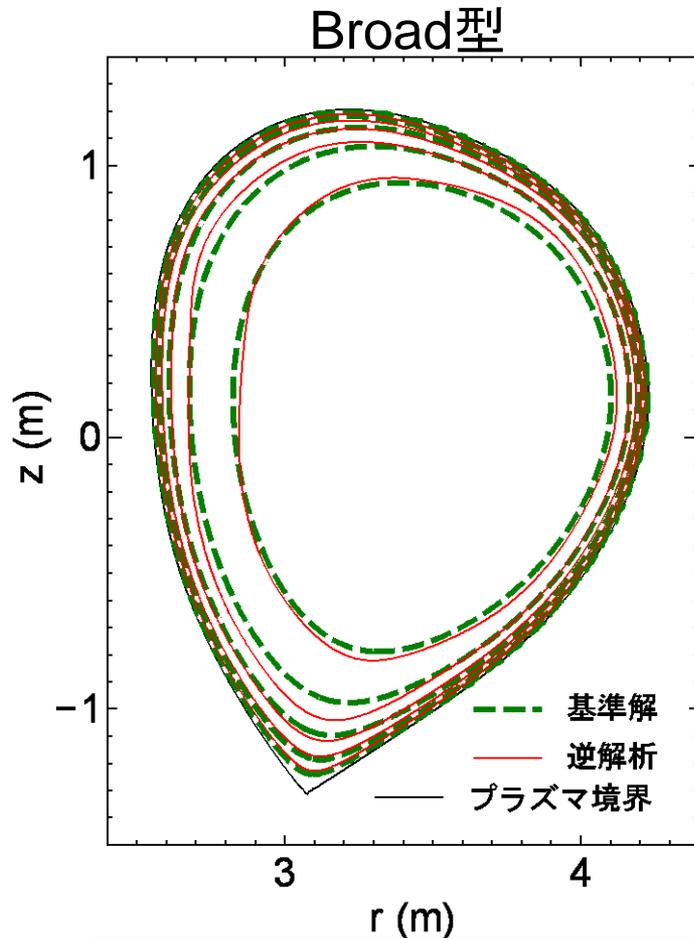


解析結果と基準解はよく一致

逆解析結果 (JT-60U)

ポロイダル断面での電流密度 j_ϕ の等高線

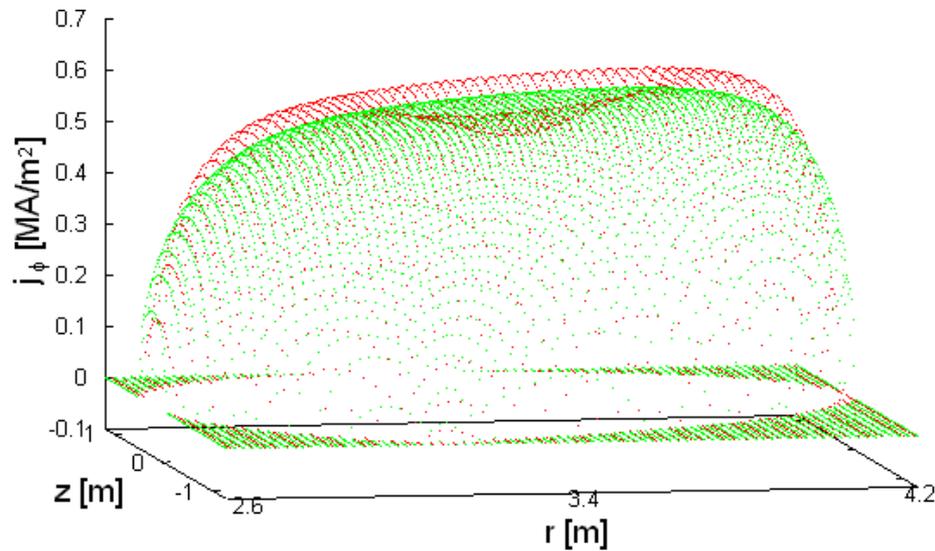
基準解: 平衡計算コード
SELENEによる結果



基準解と解析結果は概ね一致したが、一部にずれが見られる

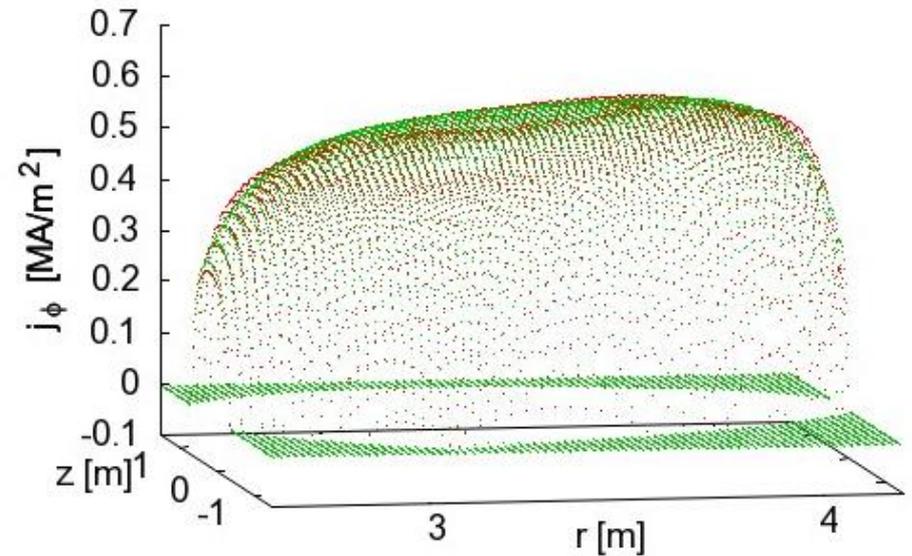
多項式近似との比較 (Broad型)

多項式近似による電流密度分布



● 基準解 ● 逆解析結果

擬似RBF近似による電流密度分布

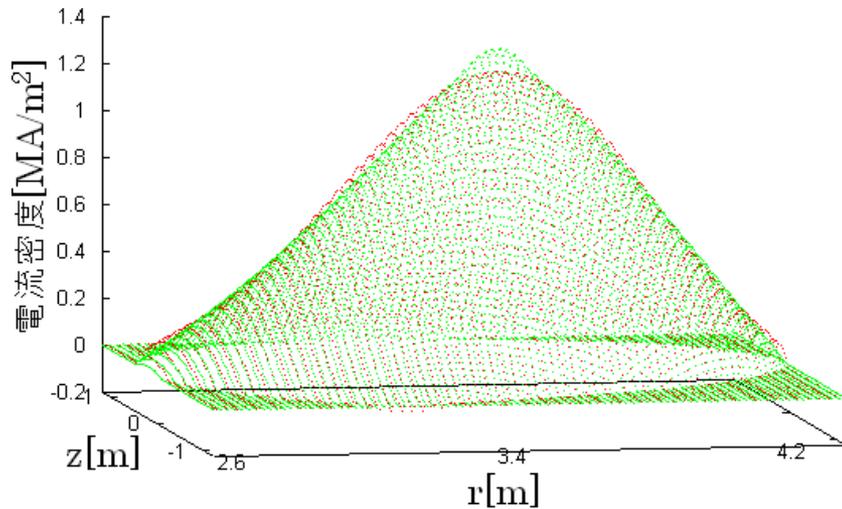


● 基準解 ● 逆解析結果

擬似RBF近似では多項式近似に見られる振動が小さくなる

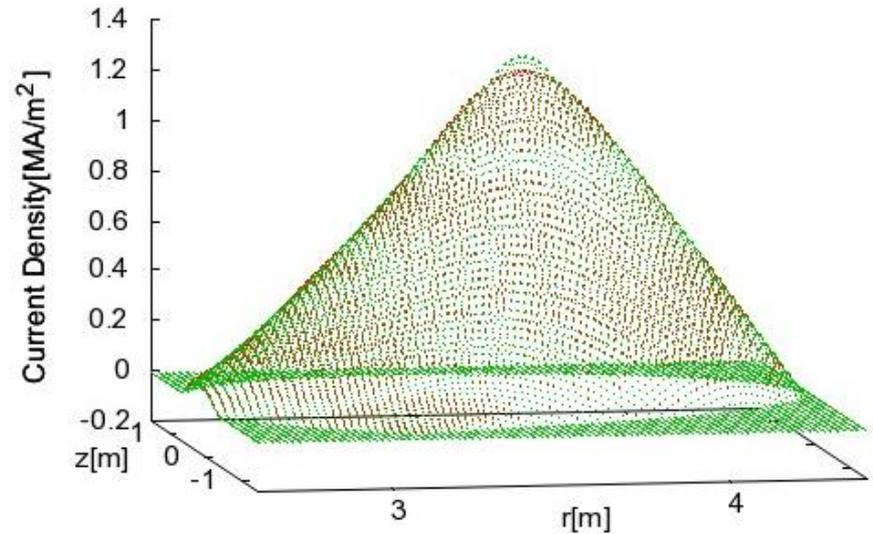
多項式近似との比較 (Peaked型)

多項式近似による電流密度分布



● 基準解 ● 逆解析結果

擬似RBF近似による電流密度分布



● 基準解 ● 逆解析結果

擬似RBF近似のほうがピークの再現性が良い

まとめ

- JT-60Uを対象に, プラズマ電流密度を擬似RBFによって近似する逆解析を行った
- 4種類の電流密度分布の逆解析結果は, 基準解と概ね一致した
- 擬似RBF近似を使うことによって, 多項式近似よりも良い精度で基準解を再現できた