



ジャイロ運動論モデル — 現代的な定式化と最近の話題 —

日本原子力研究開発機構
核融合研究開発部門
プラズマ理論シミュレーショングループ

宮戸直亮

第16回若手科学者によるプラズマ研究会
平成25年3月4日～3月6日
那珂核融合研究所

基本的考え方

- 強磁場中の荷電粒子はローレンツ力で磁力線周りの速い旋回運動を行う。

$$\Omega_i = \frac{eB}{m_i} = \frac{1.60 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27}} \sim 10^8 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

- 異常輸送の原因とされるドリフト波乱流などの時間スケールはこれよりもっと遅い。

$$\omega_*/\Omega_i = k_\theta \frac{T}{eBL_n\Omega_i} = k_\theta \rho \frac{\rho}{L_n} \sim 10^{-3}$$

- そのままで乱流の時間発展シミュレーションをしようとするとう時間ステップを非常に細かくとる必要がある。
- ゆっくりとした部分だけうまく取り出せないだろうか？

昔のやり方

- Vlasov方程式を速い時空間スケールで平均化しよう。

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

- この方法は直感的でわかり易そうに思えるが、実際は訳が分からず、しかもいくつかの難点がある。
 - 微分方程式を直接操作する必要があるためややこしい。
→最近、新しく開発された手法ではこの難点はない。
 - 元々のVlasov-Maxwell方程式系にはある保存則(全エネルギー保存や運動量保存)が明らかではなくなる。
 - 保存則がないため非線形の乱流シミュレーションなどには使えない。



単一荷電粒子運動の基本1-形式(相空間ラグランジアン)を簡約化する現代的定式化へ。

基本1-形式

4

平衡磁場中の単一荷電粒子運動の基本1-形式(相空間ラグランジアン)

$$\gamma = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - hdt = [e\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + \epsilon_B m \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{x} - \epsilon_B \frac{m|\mathbf{v}|^2}{2} dt$$

粒子速度を

$$\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{b} + v_{\perp} \mathbf{c} \quad \mathbf{c} = -\sin\theta \mathbf{e}_1 - \cos\theta \mathbf{e}_2$$

と分解すると1-形式は

$$\gamma = [e\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + \epsilon_B m v_{\parallel} \mathbf{b} + \epsilon_B m v_{\perp} \mathbf{c}] \cdot d\mathbf{x} - \epsilon_B \left[\frac{m v_{\parallel}^2}{2} + \frac{m v_{\perp}^2}{2B} B \right] dt$$

$$\epsilon_B = \frac{\rho}{L_B}$$

と書かれる。

まず最初の目標は、平衡磁場中の荷電粒子運動において速い旋回運動とそれ以外の遅い運動を分離すること、具体的には上の1-形式からジャイロ角 θ の依存性を取り除けばいい。(Guiding-centre theory)

外微分形式

0-形式(スカラー) S

1-形式(共変ベクトル)

例1: ベクトルポテンシャル $A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$

例2: スカラーの勾配 $dS = \partial_1 S dx^1 + \partial_2 S dx^2 + \partial_3 S dx^3$

0-形式の外微分

2-形式(例: 磁場B)

上のベクトルポテンシャルの外微分をとると

$$\begin{aligned} dA &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2} dx^2 - \frac{\partial A_1}{\partial x^3} dx^3 \right) \wedge dx^1 + \dots \\ &= \left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \dots \\ &= B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2 = B \end{aligned}$$

なお、外微分の外微分は常にゼロになるので、 $dB = d(dA) = 0$
これは $\nabla \cdot B = 0$ を表すことになる。

Lie変換による摂動解析

6

変換前の1-形式を γ 、変換後の1-形式を Γ とすると、各オーダーの函数関係式は以下ようになる。[Cary-Littlejohn 1983]

$$\Gamma_0 = \gamma_0 + dS_0$$

$$\Gamma_1 = \gamma_1 - L_1\gamma_0 + dS_1$$

$$\Gamma_2 = \gamma_2 - L_2\gamma_0 - \frac{1}{2}L_1(\gamma_1 + \Gamma_1) + dS_2$$

$$\Gamma_3 = \gamma_3 - L_3\gamma_0 - L_2\Gamma_1 - L_1\gamma_2 + \frac{1}{3}L_1^2\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_1\right) + dS_3$$

ここで、 S_n はn次オーダーの任意のスカラー函数、 L_n はn次オーダーのリー微分を表し、1-形式に対するリー微分は以下で与えられる。

$$L_n\gamma = G_n^j \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial z^j} - \frac{\partial \gamma_j}{\partial z^i} \right) dz^i$$

各 Γ_n がジャイロ角に依存しないように、 S_n と G_n^j を決めていく。
摂動解析なので微小パラメータが必要。

案内中心変換

7

案内中心変換(案内中心座標 $\mathbf{Z} = (\mathbf{X}, U, \mu, \xi)$ 表示)

微小パラメータ

$$\epsilon_B = \frac{\rho}{L_B}$$

$$G_1^{\mathbf{X}} = -\rho,$$

$$G_1^U = \frac{\mu}{e} (a_1 : \nabla \hat{b} + \hat{b} \cdot \nabla \times \hat{b}) + \frac{UW}{\Omega} \hat{c} \cdot \nabla \times \hat{b},$$

$$G_1^\mu = \mu \rho \cdot \nabla \log B - \frac{U\mu}{\Omega} a_1 : \nabla \hat{b} - \frac{mU^2 W}{B \Omega} \hat{c} \cdot \nabla \times \hat{b} - \frac{U\mu}{\Omega} \hat{b} \cdot \nabla \times \hat{b},$$

$$G_1^\xi = -\rho \cdot \mathbf{R} + \frac{mU^2 W}{2\mu B \Omega} \hat{a} \cdot \nabla \times \hat{b} + \frac{U}{\Omega} a_2 : \nabla \hat{b} + \frac{W}{\Omega} \hat{c} \cdot \nabla \log B$$

$$G_2^{\mathbf{X}} = \frac{1}{2} \left(g_1^\mu \frac{\partial \rho}{\partial \mu} + g_1^\xi \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) + \rho \left(\frac{U}{\Omega} \hat{b} \cdot \nabla \times \hat{b} \right) - \frac{1}{m} \frac{\partial S'_3}{\partial U} \hat{b},$$

$$S'_3 = \frac{m}{e} \left[-\frac{mU^2 W}{B\Omega} \hat{a} \cdot \nabla \times \hat{b} - \frac{U\mu}{\Omega} a_2 : \nabla \hat{b} - \frac{2W}{3\Omega} \mu \hat{c} \cdot \nabla \log B \right]$$

ここで $W \equiv (2\mu B/m)^{1/2}$, $g_1^\mu \equiv G_1^\mu + \mu G_1^{\mathbf{X}} \cdot \nabla \log B$, $g_1^\xi \equiv G_1^\xi - G_1^{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{R}$

$$\hat{a} = \rho/\rho = \cos \xi \mathbf{e}_1 - \sin \xi \mathbf{e}_2, \hat{c} = \hat{a} \times \hat{b} = -\sin \xi \mathbf{e}_1 - \cos \xi \mathbf{e}_2$$

$$a_1 = -\frac{\hat{a}\hat{c} + \hat{c}\hat{a}}{2}, a_2 = \frac{\hat{c}\hat{c} - \hat{a}\hat{a}}{4}, \mathbf{R} = (\nabla \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2$$

案内中心1-形式

8

案内中心変換

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \varepsilon G_1^{\mathbf{X}} + O(\varepsilon^2), \quad U = v_{\parallel} + \varepsilon G_1^U + O(\varepsilon^2),$$

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} + \varepsilon G_1^{\mu} + O(\varepsilon^2), \quad \xi = \theta + \varepsilon G_1^{\xi} + O(\varepsilon^2)$$

$$G_1^{\mathbf{X}} = -\boldsymbol{\rho},$$

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{v_{\perp}}{\Omega} (\cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2)$$

により、単一荷電粒子運動の1-形式

$$\gamma = L_p dt = [e\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + m\mathbf{v}] \cdot d\mathbf{x} - \frac{m|\mathbf{v}|^2}{2} dt$$

は案内中心1-形式

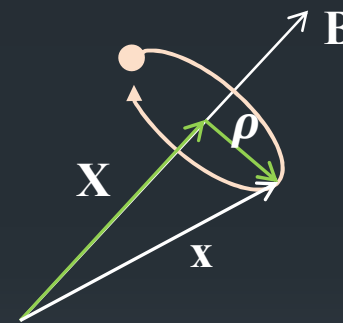
$$\Gamma = e\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, U, \mu) \cdot d\mathbf{X} + \frac{m}{e} \mu d\xi - H(\mathbf{X}, U, \mu) dt,$$

に変換される。ここで

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, U, \mu) = \mathbf{A}_0(\mathbf{X}) + \frac{m}{e} U \mathbf{b}(\mathbf{X}) - \frac{m}{e^2} \mu \mathbf{W}(\mathbf{X})$$

$$H = \frac{mU^2}{2} + \mu B(\mathbf{X}), \quad \mathbf{W} = (\nabla \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} (\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b}) \mathbf{b}$$

案内中心ラグランジアンでは ξ が循環座標になっていて、 μ は保存される。



案内中心ハミルトン方程式

9

案内中心ラグランジアンのおイラー—ラグランジュ方程式は

$$\dot{\mathbf{X}} = \{\mathbf{X}, H\} = \frac{\mathbf{B}^*}{mB_{\parallel}^*} \frac{\partial H}{\partial U} + \frac{\mathbf{b}}{eB_{\parallel}^*} \times \nabla H$$

$$\dot{U} = \{U, H\} = -\frac{\mathbf{B}^*}{mB_{\parallel}^*} \cdot \nabla H$$

$$\dot{\mu} = \{\mu, H\} = 0$$

$$\dot{\xi} = \{\xi, H\} = \frac{e}{m} \frac{\partial H}{\partial \mu} + \mathbf{W} \cdot \dot{\mathbf{X}}$$

$$\begin{aligned} \{X_i, X_j\} &= -\frac{\epsilon_{ijk}}{eB_{\parallel}^*} b_k, \\ \{\mathbf{X}, U\} &= \frac{\mathbf{B}^*}{mB_{\parallel}^*}, \quad \{\mathbf{X}, \xi\} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{W}}{eB_{\parallel}^*}, \\ \{U, \xi\} &= -\frac{\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{W}}{mB_{\parallel}^*}, \quad \{\xi, \mu\} = \frac{e}{m} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}^* \equiv \nabla \times \mathbf{A}^*, \quad B_{\parallel}^* \equiv \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{b}$$

なので、分布関数 F が初期にジャイロ角に依存しないとするとVlasov方程式は

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{\mathbf{X}} \cdot \nabla F + \dot{U} \frac{\partial F}{\partial U} = 0$$

となり、5次元(μ はパラメータとみなせるので4+1次元)相空間に簡約化される。

静電ポテンシャル揺動の導入

10

案内中心1-形式に電磁場揺動を導入する。
(ここでは簡単のため磁場揺動は無視し静電ポテンシャル揺動のみ考える。)

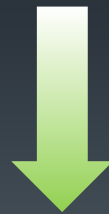
$$\Gamma = e\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, U, \mu) \cdot d\mathbf{X} + \frac{m}{e}\mu d\xi - \left[\frac{mU^2}{2} + \mu B(\mathbf{X}) + \epsilon_\delta e\varphi(T_{GC}^{-1}\mathbf{x}, t) \right] dt,$$

ここで、 $T_{GC}^{-1}\mathbf{x}$ は粒子位置 \mathbf{x} を案内中心空間で表したもので

$$T_{GC}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{X} + \boldsymbol{\rho} + O(\epsilon_B^2)$$

$$\epsilon_\delta = \frac{e\varphi}{T}$$

したがって φ の引数の $\boldsymbol{\rho}$ や高次項を通してジャイロ角依存性が再導入される。



新たな変換でジャイロ角依存性を取り除く必要がある。
ジャイロ中心座標への変換

$$\epsilon_\delta = \frac{e\varphi}{T}$$

ジャイロ中心変換

静電的な場合、ジャイロ角の依存性が残っているのはハミルトニアンだけで、それ以外のシンプレクティック部分を変更する必要はない。このときジャイロ中心変換は単なる正準変換であり、簡単に

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} + \epsilon_\delta \{S_1, \mathbf{Z}\} + O(\epsilon_\delta^2), \quad S_1 = \frac{e}{\Omega} \int \tilde{\varphi} d\bar{\xi}, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \langle \varphi \rangle \leftarrow \text{ジャイロ角による平均}$$

ジャイロ中心1-形式は下のようになる。

$$\bar{\Gamma} = e\mathbf{A}^*(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu}) \cdot d\bar{\mathbf{X}} + \frac{m}{e} \bar{\mu} d\bar{\xi} - \left[\frac{m\bar{U}^2}{2} + \bar{\mu}B(\bar{\mathbf{X}}) + e\Psi(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mu}, t) \right] dt,$$

$$\Psi(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mu}, t) = \epsilon_\delta \langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\rho}(\bar{\mathbf{Z}})) \rangle - \epsilon_\delta^2 \frac{e}{2B(\bar{\mathbf{X}})} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} (\langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}})^2 \rangle - \langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}) \rangle^2)$$

案内中心1-形式と比べるとハミルトニアンにジャイロ平均した静電ポテンシャルに関連した項が追加されただけの形になっている。

さらに、シンプレクティック部分の形が案内中心のときと同じなので、変換のヤコビアンやポアソン括弧も案内中心のときと変わらない。案内中心変換とは別の微小パラメータを使っていることに注意。

ジャイロ中心ハミルトン方程式

12

案内中心の場合と比べて、ハミルトニアンが違うだけ

$$\dot{\bar{\mathbf{X}}} = \{\bar{\mathbf{X}}, \bar{H}\} = \frac{\mathbf{B}^*}{mB_{\parallel}^*} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{U}} + \frac{\mathbf{b}}{eB_{\parallel}^*} \times \bar{\nabla} \bar{H}$$

$$\dot{\bar{U}} = \{\bar{U}, \bar{H}\} = -\frac{\mathbf{B}^*}{mB_{\parallel}^*} \cdot \bar{\nabla} \bar{H}$$

$$\dot{\bar{\mu}} = \{\bar{\mu}, \bar{H}\} = 0$$

$$\dot{\bar{\xi}} = \{\bar{\xi}, \bar{H}\} = \frac{e}{m} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\mu}} + \mathbf{W} \cdot \dot{\bar{\mathbf{X}}}$$

$$\mathbf{B}^* \equiv \nabla \times \mathbf{A}^*, B_{\parallel}^* \equiv \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{b}$$

$$\bar{H} = \frac{m\bar{U}^2}{2} + \bar{\mu}B(\bar{\mathbf{X}}) + e\langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \rho(\bar{\mathbf{Z}})) \rangle + O(\varepsilon_{\delta}^2)$$

Vlasov方程式の形も同じ

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} + \dot{\bar{\mathbf{X}}} \cdot \bar{\nabla} \bar{F} + \dot{\bar{U}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{U}} = 0$$

ジャイロ運動論的ポアソン方程式

13

閉じた方程式系にするためには静電ポテンシャルについてのポアソン方程式を考える必要がある。(静電ポテンシャルはポアソン方程式を解いて求められる。)

$$-\epsilon_0 \nabla^2 \phi = \sum_s e_s n_s = \sum_s e_s \int d^3 \mathbf{v} f_s$$

問題は、上式の右辺の f_s は (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 空間での分布関数であるが、ジャイロ運動論的Vlasov方程式から求められるのはジャイロ中心空間での分布関数であることである。

1つの方法は、ジャイロ中心分布関数 \bar{F} を (\mathbf{x}, \mathbf{v}) 空間に引き戻す (pull back) ことであるが、通常は右辺の速度空間積分の部分を、 \bar{F} のジャイロ中心空間での積分で表す。

すなわち、粒子密度の“押し出し(push forward)表現”を求めれば良い。

粒子密度の押し出し表現 (一般的表現)

14

粒子密度はデルタ函数を用いて(x, v)空間(粒子相空間)での積分で書くことができる。

$$n(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r})$$

粒子相空間から案内中心空間およびジャイロ中心空間への変換は、速度空間のみの変換ではなく、6次元相空間すべての座標についての変換なのでこのように表す必要がある。

この右辺の、ジャイロ中心空間での積分の表し方には2通りある。

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= \int d^6\bar{\mathbf{Z}} J(\bar{\mathbf{Z}}) [T_{Gy}^* \bar{F}](\bar{\mathbf{Z}}) \delta^3(T_{GC}^{-1} \mathbf{x}(\bar{\mathbf{Z}}) - \mathbf{r}) \longleftarrow \text{標準的な定式化ではこちらが用いられる。} \\ &= \int d^6\bar{\mathbf{Z}} J(\bar{\mathbf{Z}}) \bar{F}(\bar{\mathbf{Z}}) \delta^3(T_{Gy}^{-1} T_{GC}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{x} = (B_{\parallel}^*/m) d^3\bar{\mathbf{X}} d\bar{U} d\bar{\mu} d\bar{\xi}$$

粒子密度の押し出し表現 (近似的表現)

15

標準的に用いられる一般的表現から具体的な表現を求めてみよう。

まず、 $T_{GC}^{-1}\mathbf{x}(\bar{\mathbf{Z}})$ の部分は単に、 $T_{GC}^{-1}\mathbf{x} \approx \mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}$ をジャイロ中心座標で置き換えた物で

$$T_{GC}^{-1}\mathbf{x}(\bar{\mathbf{Z}}) \approx \bar{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\rho}(\bar{\mathbf{Z}})$$

$T_{GC}^{-1}\mathbf{x}$ は案内中心空間での粒子位置を表していたが、 $T_{GC}^{-1}\mathbf{x}(\bar{\mathbf{Z}})$ はジャイロ中心空間での粒子位置を表さないことに注意。ジャイロ中心空間での粒子位置はもう一つの表現に表れていた $T_{Gy}^{-1}T_{GC}^{-1}\mathbf{x}$ である。

ジャイロ中心分布関数の引き戻し $T_{Gy}^*\bar{F}$ は

$$T_{Gy}^*\bar{F} \approx \bar{F} + \epsilon_\delta \{S_1, \bar{F}\} \approx \bar{F} + \epsilon_\delta \frac{e\tilde{\varphi}}{B} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}}, \quad \tilde{\varphi} = \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}) - \langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}) \rangle$$

と近似して

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &\approx \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \bar{J} \left(\bar{F} + \epsilon_\delta \frac{e\tilde{\varphi}}{B} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}} \right) \delta^3(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{r}) \\ &\approx \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \delta^3(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{r}) \left[\langle e^{\bar{\boldsymbol{\rho}} \cdot \bar{\nabla}} \rangle \bar{F} \bar{J} + \epsilon_\delta \frac{e}{B} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}} \bar{J} \left(1 - \langle e^{\bar{\boldsymbol{\rho}} \cdot \bar{\nabla}} \rangle^2 \right) \varphi(\bar{\mathbf{X}}) \right] \end{aligned}$$

2次オーダーの項は無視

ジャイロ運動論的準中性条件

16

電子のジャイロ半径はイオンに比べて小さいので、左辺の粒子密度を電子の密度と考えれば、粒子密度の押し出し表現はジャイロ運動論的準中性条件とみなせる。

$$n(\mathbf{r}) \approx \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \delta^3(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{r}) \left[\langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle \bar{F} \bar{J} + \epsilon_\delta \frac{e}{B} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}} \bar{J} \left(1 - \langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle^2 \right) \varphi(\bar{\mathbf{X}}) \right]$$

実際のジャイロ運動論モデルではこれからさらに近似される。

上の表現では磁場の変化は高次の効果として無視しなければならない。また、 φ は短波長であると仮定されている。そのため長波長を考える場合は注意が必要。

$O(\epsilon_\delta)$ 項の \bar{F} をマクスウェル分布 ($F_M \propto \exp(-\bar{\mu}B/T_\perp)$) で近似 $\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}} \approx -\frac{B}{T_\perp} F_M$

このとき上式は $n = \bar{N} + n_0(\Gamma_0 - 1) \frac{e\varphi}{T_\perp}$

$\bar{N} \equiv \int d\bar{U} d\bar{\mu} d\bar{\xi} \langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle \bar{F} \bar{J}$: ジャイロ平均したジャイロ中心密度

$$\Gamma_0 \equiv \frac{1}{n_0} \int d\bar{U} d\bar{\mu} d\bar{\xi} \bar{J} F_M \langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle^2$$

近似をする場合、対応する修正をVlasov方程式にも施さないと保存則が破れたりする。

ジャイロ運動論的場の理論

17

方程式系を矛盾無く構成するためにはジャイロ運動論的場の理論[Sugama 2000]に基づく全系のラグランジアンを考えて、それから変分原理により場の方程式を導くのが便利。

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = \sum_s \int d^6 \mathbf{Z}' \mathcal{J}_s(\mathbf{Z}') F_s(\mathbf{Z}', t') L_{ps}[\bar{\mathbf{Z}}_s(\mathbf{Z}', t'; t), \dot{\mathbf{Z}}_s(\mathbf{Z}', t'; t), t] + \int_V d^3 \mathbf{x} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\nabla \varphi(\mathbf{x}, t)|^2 - \frac{1}{2\mu_0} |\nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{x})|^2 \right),$$

L_{ps} は各粒子種のラグランジアンで、 $L_{ps} = e_s \mathbf{A}_s^* \cdot \dot{\mathbf{X}}_s + \frac{m_s}{e_s} \bar{\mu}_s \dot{\xi}_s - \bar{H}_s$

作用 I に対する φ の変分(汎関数微分)をとって、 $\delta I / \delta \varphi = 0$ から機械的に φ についての矛盾のない方程式が得られる。

$$\epsilon_0 \nabla^2 \varphi = \underbrace{\sum_s \int d^6 \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathcal{J}}_s \bar{F}_s \frac{\delta L_{ps}(\bar{\mathbf{Z}})}{\delta \varphi(\mathbf{r})}}_{\text{この部分から粒子密度の押し出し表現が得られる。}} = - \sum_s e_s n_s$$

この部分から粒子密度の押し出し表現が得られる。

押し出し表現の変分的表現

18

電荷密度の部分が $\sum en$ に一致するという要請から粒子密度についての一般的な押し出し表現が得られる [Miyato, PFR 2011]

$$n(\mathbf{r}) = -\frac{1}{e} \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \bar{J}\bar{F} \frac{\delta L_p(\bar{\mathbf{Z}})}{\delta\varphi(\mathbf{r})} \quad (\text{粒子種についての添字は省略})$$

標準モデルのようにラグランジアンของシンプレクティック部分に静電ポテンシャルがないときは、ジャイロ運動論的ハミルトニアンだけで書いて

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{e} \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \bar{J}\bar{F} \frac{\delta \bar{H}(\bar{\mathbf{Z}})}{\delta\varphi(\mathbf{r})}$$

つまりハミルトニアンがあれば、その変分をとって、部分積分するだけでジャイロ運動論的準中性条件が得られる。先ほどの標準的なジャイロ運動論的準中性条件を得るためには次のハミルトニアンを考えればよい。

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu}, t) &= \frac{m}{2} \bar{U}^2 + \bar{\mu} B(\bar{\mathbf{X}}) + \varepsilon_\delta e \langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\rho}) \rangle \\ &\quad - \varepsilon_\delta^2 \frac{e^2}{2B(\bar{\mathbf{X}})} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} (\langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\rho})^2 \rangle - \langle \varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\rho}) \rangle^2) \end{aligned}$$

18

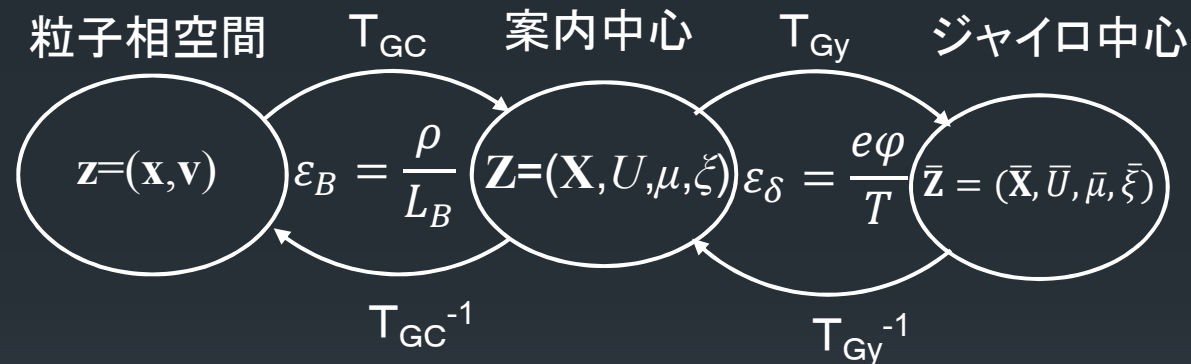
現代的な定式化のまとめ

19

- ◆ 2段階の相空間変換で磁場中の単一荷電粒子運動の基本1-形式(相空間ラグランジアン)から旋回運動の角度変数(ジャイロ角)の依存性を取り除く。

案内中心変換

ジャイロ中心変換



- ◆ 場の理論に基づき、粒子集団だけでなく電磁場も含む全系のラグランジアンを構成し、電磁場の方程式は変分原理で導く。
 - これにより矛盾のない方程式系を構成出来る。
 - 厳密な保存エネルギーもネーターの定理により導くことが出来る。

注意

20

- ◆ 標準的なジャイロ運動論モデルの定式化には2つの微小パラメータが使われている。

$$\varepsilon_B = \frac{\rho}{L_B} \quad \varepsilon_\delta = \frac{e\varphi}{T}$$

標準モデル(Hahm, Phys. Fluids 31, 2670 (1988))では $\varepsilon_B \sim \varepsilon_\delta$ としている上、その論文ではジャイロ中心変換の説明しかないため、ジャイロのシミュレーション研究者でも正しく理解している人は少ない。(Littlejohn 1981, 1983またはBrizardの博士論文を読みましょう。)

- ◆ ジャイロ運動論の長波長極限(あるいはジャイロ半径ゼロ極限)のことを、ドリフト運動論極限と呼んでいる論文があったりするが、ジャイロ運動論はドリフト運動論のスーパーセットではない。

ジャイロ運動論には $\varepsilon_\delta = \frac{e\varphi}{T} \ll 1$ という振幅について制限が課されている。

最近、そもそも標準ジャイロ運動論は長波長領域では怪しいという議論がある。所詮は近似モデルの一つなのでその適用範囲は常に気をつけておく必要があり、実験あるいはより厳密なモデルによる検証が必要。

実験との比較例

21

“L-mode validation studies of gyrokinetic turbulence simulations via multiscale and multifield turbulence measurements on the DIII-D tokamak”

T.L. Rhodes, et al., Nucl. Fusion **51**
(2011) 063022

GYROとGEMがジャイロ運動論モデルを用いたシミュレーションの結果
(electromagnetic, delta-f, flux-tube)

イオン熱輸送、電子熱輸送とも定量的に実験とばっちり合っているとは言い難い。特にエッジは全然合っていない。

第一原理で無い以上、容量・用法は守って使いましょう。

ジャイロ運動論モデル vs ジャイロ流体モデル

22

B. Scott, APS 2012

ベータによる変化の傾向
は同じ、特に捕捉粒子を
入れないジャイロ運動論
とジャイロ流体の結果は
高ベータでよく一致

ジャイロ流体モーメントと 粒子流体モーメント

先ほどの粒子密度の押し出し表現を思い出してみよう。

$$n(\mathbf{r}) = \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \delta^3(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{r}) \left[\langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle \bar{F} \bar{J} + \epsilon_\delta \frac{e}{B} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}} \bar{J} \left(1 - \langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle^2 \right) \varphi(\bar{\mathbf{X}}) \right]$$

ここで長波長極限 ($k_\perp \rho \ll 1$) をとると、演算子 $\langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle$ と $(1 - \langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle^2)$ はそれぞれ

$$\langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle \simeq 1 + \frac{1}{2} \langle (\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla})^2 \rangle, \quad (1 - \langle e^{\bar{\rho} \cdot \bar{\nabla}} \rangle^2) \simeq -\langle \bar{\rho} \cdot \bar{\nabla} \rangle^2$$

と近似され、粒子密度の押し出し表現は

$$n = N + \nabla_\perp^2 \frac{P_\perp}{2e\Omega B} + \nabla \cdot \left[\frac{N}{B\Omega} \nabla_\perp \varphi \right]$$

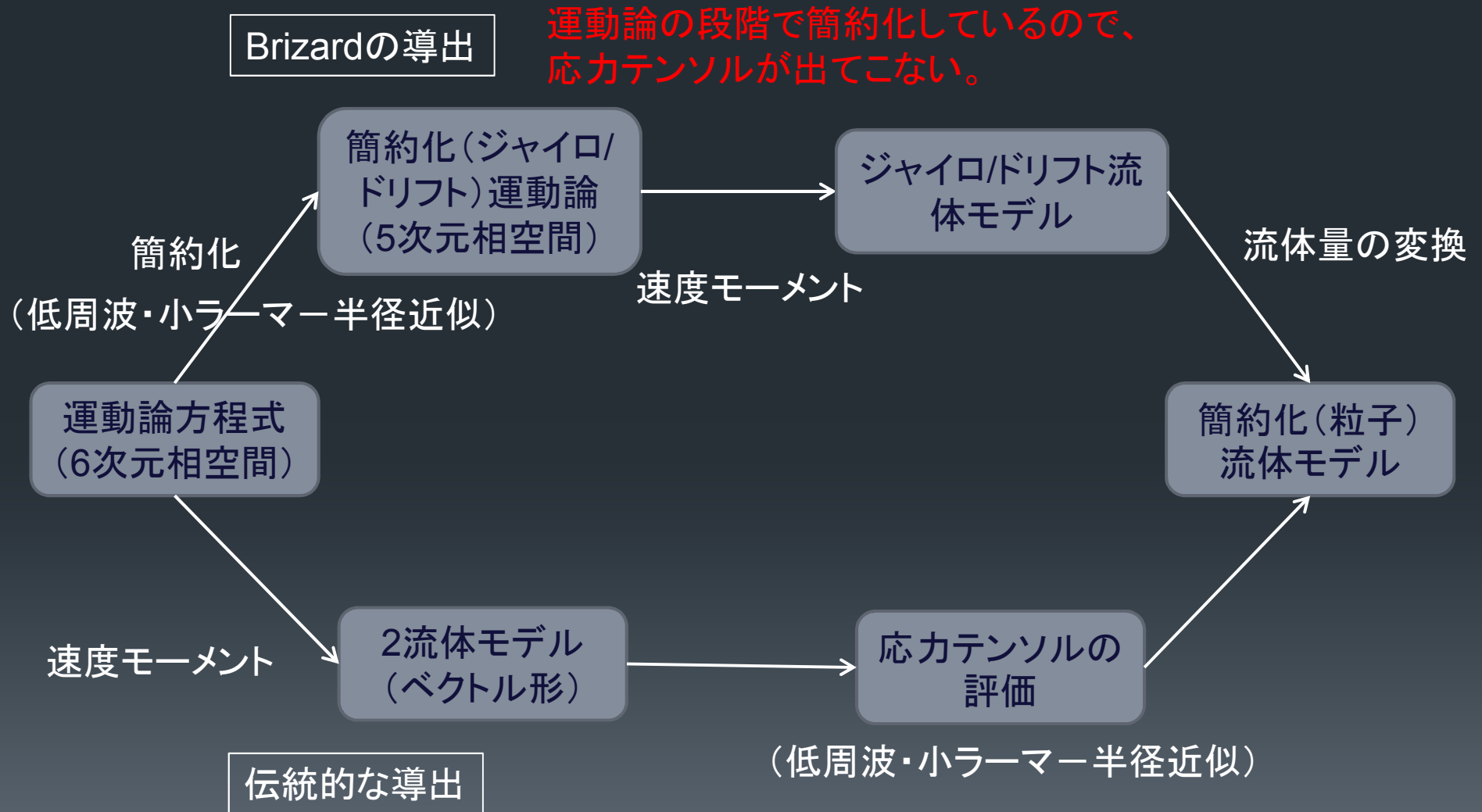
ここでジャイロ流体モーメントは次のように定義されている。

$$N \equiv \int \bar{F} \bar{J} d\bar{U} d\bar{\mu} d\bar{\xi}, \quad P_\perp \equiv \int \bar{\mu} B \bar{F} \bar{J} d\bar{U} d\bar{\mu} d\bar{\xi}$$

プラズマを含む全領域
で空間積分すれば
 $\int d^3\mathbf{r} n = \int d^3\mathbf{r} N$ で粒
子の総数とジャイロ中
心の総数が一致するこ
とがわかる。

このように一般にジャイロ運動論モデルで定義される自然な流体モーメント(ジャイロ流体モーメント)は物理的な密度等とは少し異なる。

簡約化流体モデル導出への応用



反磁性電流のはなし

25

ジャイロ中心(案内中心)の速度は

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{B}^*}{mB_{\parallel}^*} \frac{\partial H}{\partial U} + \frac{\mathbf{b}}{eB_{\parallel}^*} \times \nabla H \approx U\mathbf{b} + \frac{\mathbf{b}}{m\Omega} \times [mU^2\mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{b} + \mu\nabla B + e\nabla\langle\varphi\rangle]$$

だが、これを速度変数で積分しても反磁性ドリフト(電流)は出てこない。この反磁性ドリフトを見出すには粒子フラックス

$$\Gamma(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{x} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathbf{v} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r})$$

の押し出し表現を考える必要がある。[Brizard, *J. Phys.: Conf. Ser.* 2009]

結果だけ書くと $\Gamma = \Gamma_{\text{gc}} + \Gamma_{\text{pol}} + \Gamma_{\text{mag}}$

$$\Gamma_{\text{gc}} = \int d^3\mathbf{v} \dot{\mathbf{X}} F, \quad \Gamma_{\text{pol}} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{v} \rho F, \quad \Gamma_{\text{mag}} = \nabla \times \left\{ \int d^3\mathbf{v} F \left[\rho \times \left(\frac{1}{2} \dot{\rho} + \dot{\mathbf{X}} \right) \right] \right\}$$

↑
分極ドリフトはここから出てくるが ρ の中でジャイロ中心変換の高次の変位ベクトルを考慮する必要がある。

↑
反磁性ドリフトは $\rho \times \frac{1}{2} \dot{\rho}$ の部分から出てくる。

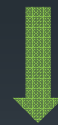
長波長の問題

26

長波長近似した粒子密度の押し出し表現(準中性条件)

$$n = N + \nabla_{\perp}^2 \frac{P_{\perp}}{2e\Omega B} + \nabla \cdot \left[\frac{N}{B\Omega} \nabla_{\perp} \varphi \right]$$

- ◆ ジャイロ運動論の定式化で静電ポテンシャルは振幅について $\epsilon_{\delta} = e\varphi/T \ll 1$ という仮定だけで、その波長については何の制限もしていないので $k_{\perp}\rho \sim 1$ の微視的スケールを取り扱うことができる。
- ◆ $k_{\perp}\rho \sim 1$ のとき準中性条件の静電ポテンシャル項は ϵ_{δ} の1次の項。
- ◆ しかし $k_{\perp}\rho \ll 1$ とすると、その項はより高次になってしまう。



このとき、これまで考慮されていなかった高次の項があれば、それを考慮しなければならない。

高次の変位ベクトル

一般的押し出し表現

$$n(\mathbf{r}) = \int d^6\bar{\mathbf{Z}} J(\bar{\mathbf{Z}}) [T_{Gy}^* \bar{F}](\bar{\mathbf{Z}}) \delta^3(T_{GC}^{-1} \mathbf{x}(\bar{\mathbf{Z}}) - \mathbf{r}) \quad \text{標準}$$

$$= \int d^6\bar{\mathbf{Z}} J(\bar{\mathbf{Z}}) \bar{F}(\bar{\mathbf{Z}}) \delta^3(T_{Gy}^{-1} T_{GC}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{r}) \quad \leftarrow \text{ここではこちらを考える。}$$

ジャイロ中心空間での粒子位置

$$T_{Gy}^{-1} T_{GC}^{-1} \mathbf{x} = \bar{\mathbf{X}} + \overset{O(\epsilon_B)}{\downarrow} \bar{\boldsymbol{\rho}} + \overset{O(\epsilon_B^2)}{\downarrow} \bar{\boldsymbol{\rho}}_{gy} + \overset{O(\epsilon_B^2)}{\downarrow} \bar{\boldsymbol{\rho}}_B + \dots$$

$$\uparrow$$

$$O(\epsilon_B \epsilon_\delta)$$

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}_{gy} = -\{S_1, \bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}\}$$

$$\boldsymbol{\rho}_B = -\left(G_2^{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{G}_1 \cdot dG_1^{\mathbf{x}}\right)$$

ジャイロ中心変換に由来する変位ベクトル。短波長では準中性条件で $O(\epsilon_\delta)$ の項になるが、長波長では $O(\epsilon_B \epsilon_\delta)$ のまま。

案内中心変換に由来する高次の変位ベクトル。平衡磁場の非一様性によるもの。標準ジャイロ運動論モデルでは考慮されない。

粒子密度の押し出し表現 (ρ_B を考慮したとき)

28

$$n(\mathbf{r}) = \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \bar{J} \left(\bar{F} + \frac{e\tilde{\varphi}}{B} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}} \right) \delta^3(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}_B - \mathbf{r})$$

または

$$n(\mathbf{r}) = \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \bar{J} \bar{F} \delta^3(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}_B + \bar{\boldsymbol{\rho}}_{gy} - \mathbf{r})$$

デルタ関数を ρ_B の冪で展開し、部分積分すると

$$n(\mathbf{r}) \approx \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \bar{J} \left(\bar{F} + \frac{e\tilde{\varphi}}{B} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\mu}} \right) \delta^3(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} - \mathbf{r}) \\ - \int d^6\bar{\mathbf{Z}} \delta^3(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{r}) \nabla \cdot (\bar{F} \bar{J} \langle \bar{\boldsymbol{\rho}}_B \rangle)$$

追加の項は長波長領域でのみ重要なので、デルタ関数中の $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ は無視した。

ここでは一般的な押し出し表現から出発して、追加の項を見出したが、正しくはハミルトニアンを追加の項を見出して、変分原理で導かねばならない。

ハミルトニアンの修正

ρ_B を考慮したハミルトニアンの修正は、私の知るところBrizardの博士論文以外では見たことがない。静電的な場合は以下のように簡単。

$$\varphi(\mathbf{T}_{GC}^{-1}\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_B + \dots) \approx \varphi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\rho}_B \cdot \nabla\varphi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}).$$

静電ポテンシャルを展開して ρ_B の1次の項だけ残すと[Brizard Diss. 1990]

$$\bar{H} = \frac{m}{2}\bar{U}^2 + \bar{\mu}B + \varepsilon_\delta q[\langle\varphi\rangle + \langle\bar{\boldsymbol{\rho}}_B \cdot \nabla\varphi\rangle] - \varepsilon_\delta^2 \frac{q^2}{2B} \frac{\partial}{\partial\mu} (\langle\varphi^2\rangle - \langle\varphi\rangle^2)$$

追加の項を $\langle\bar{\boldsymbol{\rho}}_B \cdot \nabla\varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}})\rangle \approx \langle\bar{\boldsymbol{\rho}}_B\rangle \cdot \nabla\varphi(\bar{\mathbf{X}})$ と近似すれば、ジャイロ運動論的ハミルトニアンは以下のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{H}(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu}, t) = & \frac{m}{2}\bar{U}^2 + \bar{\mu}B(\bar{\mathbf{X}}) + \varepsilon_\delta q[\langle\varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}})\rangle + \langle\bar{\boldsymbol{\rho}}_B(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu})\rangle \cdot \nabla\varphi(\bar{\mathbf{X}})] \\ & - \varepsilon_\delta^2 \frac{q^2}{2B(\bar{\mathbf{X}})} \frac{\partial}{\partial\mu} (\langle\varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}})^2\rangle - \langle\varphi(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}})\rangle^2) \end{aligned}$$

このハミルトニアンから変分的な方法で、先ほどの結果が得られる。



おまけ

六力所 2012冬(2012/2/8)



六力所 2013冬(2013/2/26)

