

トカマクプラズマにおける二次元輸送コードの開発

○瀬戸春樹, 福山淳

京都大学原子核工学専攻

mail: seto@p-grp.nucleng.kyoto-u.ac.jp

This work is supported by Grant-in-Aid for Scientific Researches (S) (20226017) from JSPS, Japan and G-COE program (J-051) from MEXT, Japan

- **研究背景**

- 周縁輸送障壁形成やプラズマ壁相互作用を含めてトカマクプラズマ全体の時間発展を記述するためには、炉心プラズマと周辺プラズマを統一的に取り扱う二次元輸送モデルの構築が望ましい

- **トカマクプラズマ全体における二次元輸送モデルのためには**

- **炉心領域**

- 従来の一次元モデルに矛盾しない形でポロイダル空間依存性を導入

- **周辺領域**

- 新古典輸送理論のより厳密な導入
- 磁気面座標系の開放系への拡張

トカマクプラズマ全体において適用出来る軸対称二次元輸送モデルを構築し、その時間発展を解析する二次元輸送コード **TASK/T2** の開発を目的とする

- **多流体方程式**

$$\frac{\partial n_a}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot (n_a \mathbf{u}_a) = S_{na}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_a n_a \mathbf{u}_a) \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot (m_a n_a \mathbf{u}_a \mathbf{u}_a)$$

$$= -\nabla p_a - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi}_a + e_a n_a (\mathbf{E} + \mathbf{u}_a \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}_a + M_a^{\text{anom}} + S_{ma}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} m_a n_a u_a^2 + \frac{3}{2} p_a \right) \Big|_{\mathbf{x}} + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} m_a n_a u_a^2 + \frac{5}{2} p_a \right) \mathbf{u}_a + \overleftrightarrow{\pi}_a \cdot \mathbf{u}_a + \mathbf{q}_a \right]$$

$$= (e_a n_a \mathbf{E} + \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{u}_a + Q_a + S_{Ea}$$

- **磁場モデル**

$$\mathbf{B} = \nabla \zeta \times \nabla \psi_0 + I \nabla \zeta$$

最低次の平衡を仮定し、トロイダル軸対称とする

- **磁気面座標系**: $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\rho, \chi, \zeta)$

- **MHD 平衡配位を記述するのに適している**

輸送方程式の定式化は磁気面座標系で行い、運動方程式に関しては新古典輸送理論との対応を明確にするため、**径方向**, **磁力線方向**, **トロイダル方向**の3方向を考える

- 実験室系と磁気面座標系の対応

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} f) - \nabla \cdot (\mathbf{u}_g f)$$

本研究では最低次の平衡から構築される磁気面座標系を考えるため、磁気面の移動速度は反変径方向成分のみを考える。

$$\mathbf{u}_g = u_a^\rho (\sqrt{g} \nabla \chi \times \nabla \zeta)$$

- 粒子密度の発展方程式

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} n_a) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\sqrt{g} n_a \bar{u}_a^{\xi_i}) = S_{na}$$

ここで \bar{u}_a は以下で定義される移動する磁気面座標系における移流速度ベクトル

$$\bar{\mathbf{u}}_a \equiv \mathbf{u}_a - \mathbf{u}_g$$

- **熱流束**: Braginskii の熱拡散モデルを用いる

$$\mathbf{q}_a = -n_a \chi_{a\parallel} \nabla_{\parallel} T_a - n_a \chi_{a\wedge} \nabla_{\wedge} T_a - n_a \chi_{a\perp} \nabla_{\perp} T_a = -n_a \overleftrightarrow{\chi}_a \cdot \nabla T_a$$

$$\chi_a^{\xi_i \xi_j} = \frac{B^{\xi_i} B^{\xi_j}}{B^2} \chi_{a\parallel} + \left[\sum_{k=1}^3 \frac{\epsilon_{jik} g_{\chi \xi_k} \psi'}{\sqrt{g}^2 B} + \frac{\epsilon_{ji3} I}{\sqrt{g} B} \right] \chi_{a\wedge} + \left[g^{\xi_i \xi_j} - \frac{B^{\xi_i} B^{\xi_j}}{B^2} \right] \chi_{a\perp}$$

ここで,

$$(B^\rho, B^\chi, B^\zeta) = \left(0, \frac{\psi'}{\sqrt{g}}, \frac{I}{R^2} \right)$$

- **粘性力**: 最低次の平行粘性を考慮し, Hirshman & Sigmar の表式を用いる

$$\pi_{a\parallel} = \frac{(-3\nabla_{\parallel} B)}{\mathbf{B} \cdot \nabla \chi} \left[\mu_{a1} u_a^\chi - \mu_{a2} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{5} \frac{\chi_a^{\chi \xi_i}}{T_a} \frac{\partial T_a}{\partial \xi_i} \right] \left(\mathbf{e}_{\parallel} \mathbf{e}_{\parallel} - \frac{1}{3} \overleftrightarrow{I} \right)$$

- 本研究では 3 方向の運動方程式を解くため, u_a^χ は直接に求まる

- **摩擦力**: Hirshman & Sigmar の表式を用いる

$$\mathbf{F}_a = \sum_b \left(l_{11}^{ab} \mathbf{u}_b + \frac{2}{5} l_{12}^{ab} \overleftrightarrow{\chi}_b \cdot \nabla \ln T_b \right)$$

- **異常輸送による運動量ソース**: 運動量保存則を仮定

$$\sum_a M_a^{\text{anom}} = 0$$

平行粘性テンソルは CGL 形式であるため, $B \cdot \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi}_{a\parallel}$ を簡潔に書くことが出来る

- 磁力線方向の平行粘性力

$$B \cdot \nabla \cdot \overleftrightarrow{\pi}_{a\parallel} = \frac{2}{3} B \nabla_{\parallel} \pi_{a\parallel} - \pi_{a\parallel} \nabla_{\parallel} B = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{2\psi'}{3} \pi_{a\parallel} \right) - \pi_{a\parallel} \nabla_{\parallel} B$$

- 磁力線方向の運動方程式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} B m_a n_a u_{a\parallel}) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{g} m_a \bar{u}_a^{\xi_i} B^{\xi_j} n_a u_{a\xi_j} \right) - \sum_{i,j=1}^3 m_a G_{ij}^{\text{para}} \bar{u}_a^{\xi_i} n_a u_{a\xi_j} \\ &= -\frac{\psi'}{\sqrt{g}} \frac{\partial p_a}{\partial \chi} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\sqrt{g} (-2\nabla_{\parallel} B) \left(\mu_{a1} u_a^{\chi} - \mu_{a2} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{5} \frac{\chi_a^{\chi \xi_i}}{T_a} \frac{\partial T_a}{\partial \xi_i} \right) \right] \\ & \quad - \frac{3 (\nabla_{\parallel} B)^2}{B \cdot \nabla \chi} \left[\mu_{a1} u_a^{\chi} - \mu_{a2} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{5} \frac{\chi_a^{\chi \xi_i}}{T_a} \frac{\partial T_a}{\partial \xi_i} \right] \\ & \quad - \frac{e_a n_a \psi'}{\sqrt{g}} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} + \sum_b \left[l_{11}^{ab} u_{b\parallel} B + l_{ab}^{12} \frac{\psi'}{\sqrt{g}} \frac{2\chi_{b\parallel}}{5T_b} \frac{\partial T_b}{\partial \chi} \right] + S_{ma\parallel} B + M_{a\parallel}^{\text{anom}} B \end{aligned}$$

ここで,

$$G_{ij}^{\text{para}} = \left[\frac{\partial B^{\xi_j}}{\partial \xi_i} + \sum_{k=1}^3 B^{\xi_k} \left\{ \begin{matrix} j \\ ki \end{matrix} \right\} \right], \quad \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} : \text{第二種 Christoffel 記号}$$

トロイダル方向の直交性 $g^{\rho\zeta} = g^{\chi\zeta} = 0$ より 2 階の対称テンソルに対して

$$R^2 \nabla\zeta \cdot \nabla \cdot \vec{T} = \nabla \cdot (R^2 \nabla\zeta \cdot \vec{T})$$

- トロイダル方向の慣性力

$$R^2 \nabla\zeta \cdot \nabla \cdot (m_a n_a \bar{u}_a \mathbf{u}_a) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{g} m_a \bar{u}_a^{\xi_i} n_a u_{a\zeta} \right) + \sum_{i=1}^3 \{^i_{31}\} m_a u_g^\rho n_a u_{a\xi_i}$$

- トロイダル方向の平行粘性力

$$R^2 \nabla\zeta \cdot \nabla \cdot \vec{\pi}_{a\parallel} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\sqrt{g} \frac{I}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla \chi) \pi_{a\parallel} \right]$$

- トロイダル方向の運動方程式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} m_a n_a u_{a\zeta}) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{g} m_a \bar{u}_a^{\xi_i} n_a u_{a\zeta} \right) + \sum_{i=1}^3 \{^i_{31}\} m_a u_g^\rho n_a u_{a\xi_i} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \chi} \left[\sqrt{g} \frac{(-3\nabla_{\parallel} B) I}{B^2} \left(\mu_{a1} u_a^\chi - \mu_{a2} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{5} \frac{\chi_a^{\chi\xi_i}}{T_a} \frac{\partial T_a}{\partial \xi_i} \right) \right] + e_a \psi' n_a u_a^\rho \\ &+ \sum_b \left[l_{11}^{ab} u_{a\zeta} + l_{12}^{ab} R^2 \sum_{i=1}^3 \frac{2}{5} \frac{\chi_b^{\zeta\xi_i}}{T_b} \frac{\partial T_b}{\partial \xi_i} \right] + S_{ma\zeta} + M_{a\zeta}^{\text{anom}} \end{aligned}$$

磁気面座標系を径方向の最低次の力の釣り合いから構築することとの対応をとり

$$0 = -\nabla p_a + e_a n_a \mathbf{E} + e_a n_a \mathbf{u}_a \times \mathbf{B}$$

- 径方向の力の釣り合いの式

$$0 = -\sum_i g^{\rho\xi_i} \frac{\partial p_a}{\partial \xi_i} - e_a n_a \sum_{i=1}^3 g^{\rho\xi_i} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} - e_a \frac{B^2}{\psi'} n_a u_{a\zeta} + e_a \frac{IB}{\psi'} n_a u_{a\parallel}$$

- 磁気面座標系における輸送方程式

$$\frac{1}{\sqrt{g}^{5/3}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g}^{5/3} \frac{3}{2} p_a \right) + \nabla \cdot \left(\frac{5}{2} \bar{u}_a p_a + \mathbf{q}_a \right) = \bar{u}_a \cdot \nabla p_a - \nabla \mathbf{u}_a : \overleftrightarrow{\pi}_{a\parallel} + Q_a + S_{Ea} - \frac{1}{2} m_a u_a^2 S_{na}$$

- 平行粘性による粘性加熱項: $\nabla \mathbf{u}_a : \overleftrightarrow{\pi}_{a\parallel}$

$$\nabla \mathbf{u}_a : \overleftrightarrow{\pi}_{a\parallel} = \left(\nabla_{\parallel} u_{a\parallel} - \mathbf{u}_a \cdot \boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}_a \right) \pi_{a\parallel}$$

- エネルギー輸送方程式

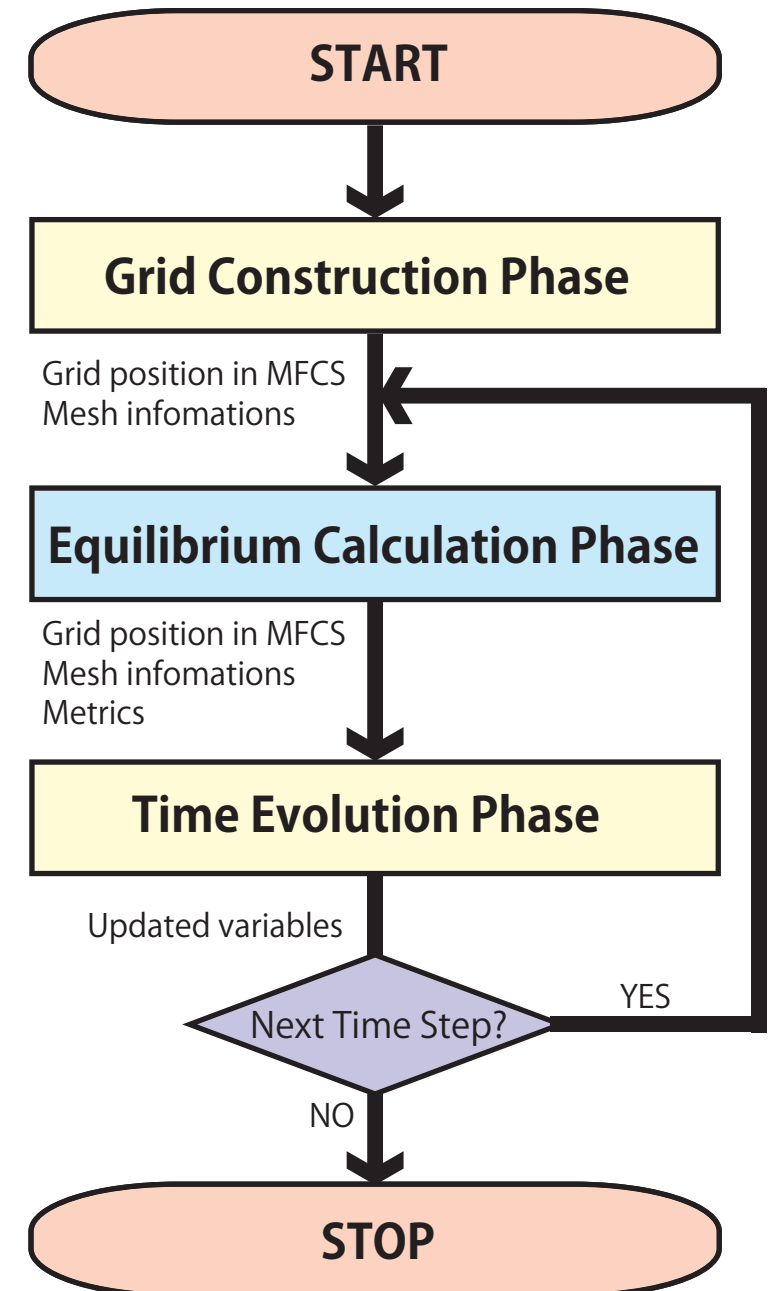
$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{g}^{5/3}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g}^{5/3} \frac{3}{2} p_a \right) + \frac{5}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{g} \bar{u}_a^{\xi_i} p_a \right) - \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sqrt{g} n_a \chi_a^{\xi_i \xi_j} \frac{\partial T_a}{\partial \xi_j} \right) \\ & = - \frac{(-3 \nabla_{\parallel} B)}{\mathbf{B} \cdot \nabla \chi} \left[\nabla_{\parallel} u_{a\parallel} - \mathbf{u}_a \cdot \boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u}_a \right] \left(\mu_{a1} u_a^{\chi} - \mu_{a2} \sum_{i=1}^3 \frac{2}{5} \frac{\chi_a^{\chi \xi_i}}{T_a} \frac{\partial T_a}{\partial \xi_i} \right) \\ & + \sum_{i=1}^3 \bar{u}_a \frac{\partial p_a}{\partial \xi_i} + \sum_b \frac{3}{2} n_a \frac{T_b - T_a}{\tau_{ab}} + S_{Ea} - \frac{1}{2} m_a u_a^2 S_{na} \end{aligned}$$

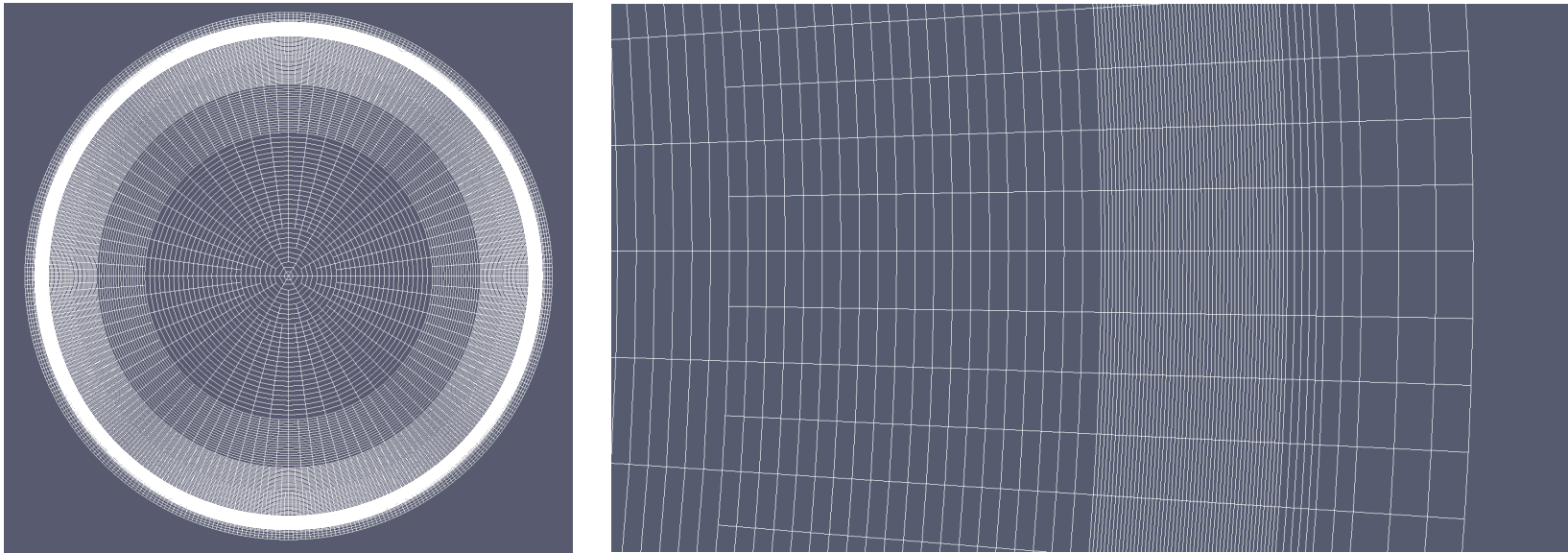
各粒子種に対する連続の式, 3方向の運動方程式, エネルギー輸送方程式と磁場拡散方程式と静電場に対する Poisson 方程式を組み合わせることにより
二次元動的輸送モデルが得られる

- **TASK/T2 における時間発展アルゴリズム**

1. **格子構築フェーズ (GC-Phase):** TASK/T2
 - **磁気面座標系における格子作成**
2. **平衡構築フェーズ (EC-Phase):** TASK/EQU
 - **解くべき方程式:** Grad-Shafranov 方程式
 - **磁気面座標系の計量係数の更新**
3. **輸送計算フェーズ (TE-Phase):** TASK/T2
 - **解くべき方程式**
 - 多流体方程式
 - 磁場拡散方程式
 - Poisson 方程式
 - **プラズマの時間発展を計算**

計算格子は固定し、計量係数の値を更新することにより、磁気面座標系の更新を行う





- **炉心-周辺二次元輸送解析に要求される空間格子の特性**
 - 高温プラズマ中では磁力線方向と磁力線に垂直な方向では輸送のスケールが大きく異なるため、二次元輸送解析を安定して行うためには磁力線方向の輸送と磁力線に垂直方向の輸送を分離して計算を行う必要がある
 - 中心領域での解の過拘束を起こすことなく周辺領域で十分な空間解像度を確保する必要がある
- **炉心半径 1m, 周辺幅 0.1m の仮想リミタープラズマを仮定した格子作成例**
 - 円筒トロイダル座標系における格子作成 (要素数: 37590)
 - 炉心領域: 径方向 90 分割, ポロイダル方向 6 分割から 384 分割
 - 周辺領域: 径方向 60 分割, ポロイダル方向 384 分割

- **連立移流拡散方程式**

多流体方程式, Poisson 方程式, 磁場拡散方程式は以下の連立移流拡散方程式として表すことが出来る

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}\mathbf{X}) - \nabla \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla \mathbf{X}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{S}$$

\mathbf{X} : 変数行列, \mathbf{V} : 移流速度ベクトル行列, \mathbf{D} : 拡散テンソル行列,
 \mathbf{A} : 勾配ベクトル行列, \mathbf{C} : 誘起係数行列, \mathbf{S} : ソース行列

$$\mathbf{X} = [n_e, n_e u_e^\rho, n_e u_{e\parallel}, \dots, \phi, t]^T$$

- **離散化手法**

- **時間方向**: 完全陰解法
- **空間方向**: 有限要素法
 - **安定化手法**: SUPG 法
 - **要素型**: 双線型長方形要素

- **行列計算**: TASK/MTXP

- **逐次ソルバー**

- 帯行列用 Gauss 消去法

- **並列ソルバー**

- **PETSc**: 並列反復法ライブラリ
- **MUMPS**: 並列直接法ライブラリ

- **非線形計算**: Picard 反復法

- **可視化モジュール**: Paraview

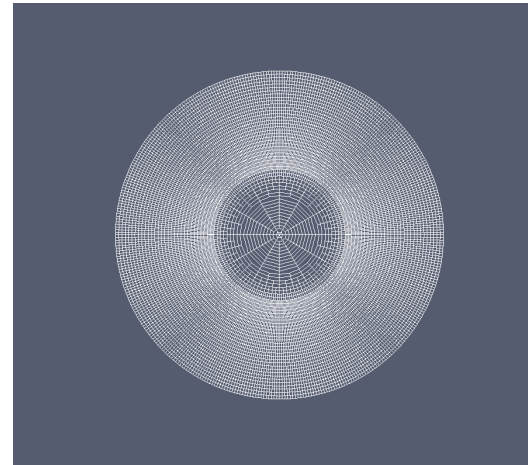
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \chi} (\rho V^\chi f) = 0, \quad V^\chi = 2\pi[\text{rad/s}], \quad a = 1[\text{m}], \quad \rho \in [0, 1], \quad \chi \in [0, 2\pi)$$

● 計算条件

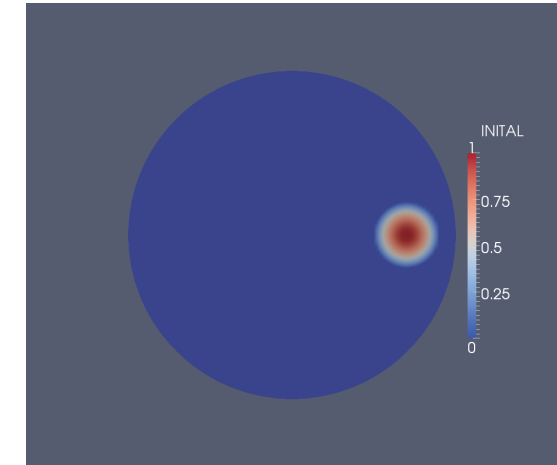
- 1 周期後のプロファイルを計算
- 時間方向分割数: 10^4
- 径方向分割数: 50
- ポロイダル分割数: 6-384
- 要素数: 12372
- with SUPG

● 計算結果

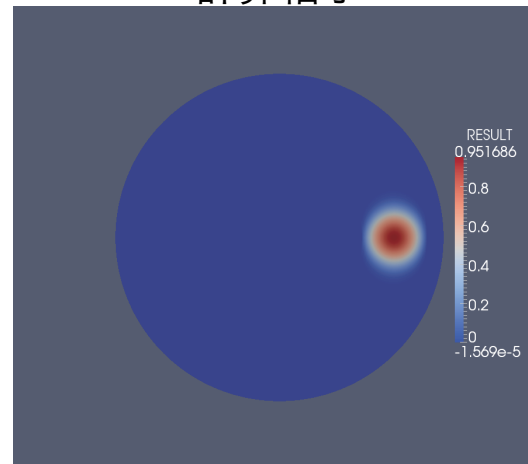
- コーン中心から 5%程度が拡散
- 数値振動は低減されている
- ポロイダル方向に数値粘性が生じているが、動的二次元輸送モデルにおいては、拡散現象が支配的であると考えられるため、数値粘性の影響は小さくなると考えられる。



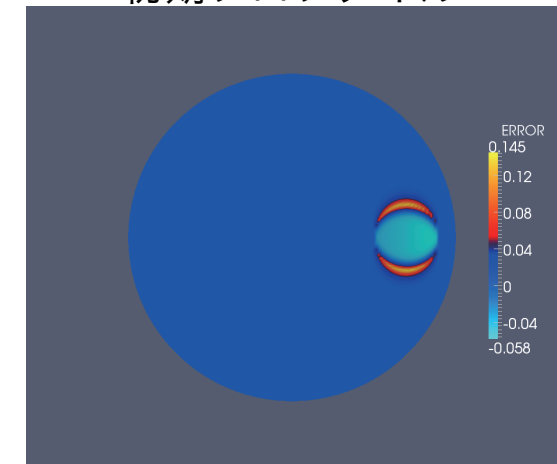
計算格子



初期プロファイル



1 周期後のプロファイル



解析解との絶対誤差

- **まとめ**

- 平行粘性を取り入れた二次元動的輸送モデルの定式化を行った
- 汎用的な逐次連立移流拡散方程式ソルバーの開発を行った
- 多階層長方形格子による計算格子作成及び、簡単なベンチマークを行った

- **今後の課題**

- **モデリング**

- 磁気面座標系の開放系への拡張
- 中性粒子の輸送方程式の導入
- ジャイロ粘性効果の導入

- **コード開発**

- 二次元動的輸送モデルの TASK/T2 への実装
- TASK/T2 の大規模並列化/高速化
- 自由境界二次元平衡コンポーネント TASK/EQU との接続

- **シミュレーション**

- 仮想リミター配位のトカマクプラズマを対象とした二次元輸送解析
 - ・ コア一次元・周辺二次元の従来の輸送解析との比較
 - ・ 周辺プラズマモデリングの高度化
 - ・ PARASOL-2D との比較による輸送モデルの妥当性検証