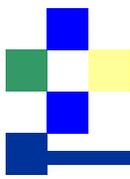


# 統計的解析手法を用いた 周辺プラズマ揺動解析

核融合科学研究所

田中 宏彦



# 講演概要

講演題目: 統計的解析手法を用いた周辺プラズマ揺動解析

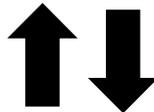
## 研究対象

周辺プラズマ輸送  
(Plasma Blob輸送等)

流体・プラズマ・そ  
の他様々な分野

計測方法

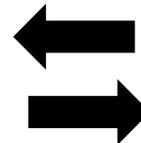
実験



収集

高時間分解能計測  
(静電プローブ・高速カメラ)

適用



解釈

解析方法

統計的解析

導入

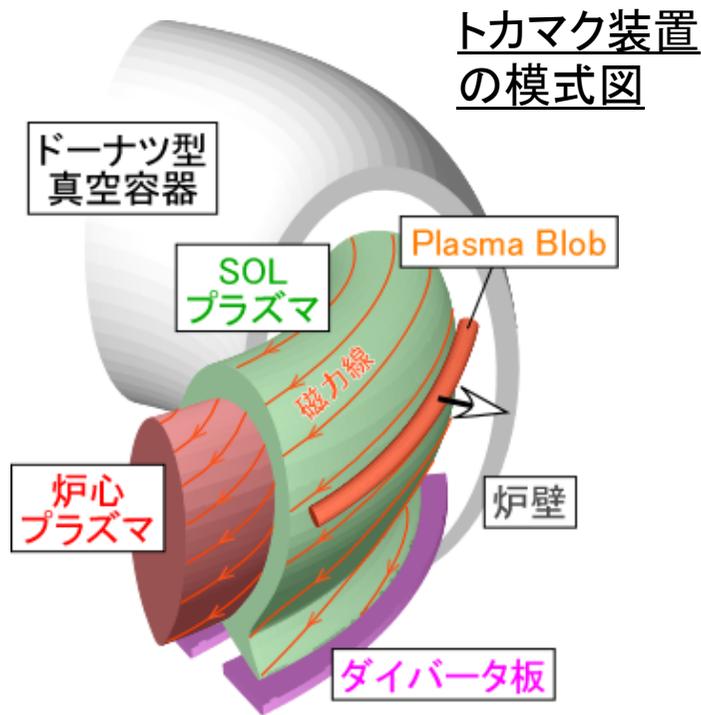
↑ 本講演のメイン

プラズマ・核融合学会誌 講座

辻義之、大野哲靖、田中宏彦: プラズマ・核融合学会誌(全6章) 85  
(2009) 618-619, 620-630, 665-673, 774-782, 783-792, 834.

<http://www.ees.nagoya-u.ac.jp/~koukai/purakaku85/koza.html>

# 周辺領域中の非拡散的プラズマ輸送



## 周辺領域

- ・・・コア領域の外側の開いた磁力線領域
  - スクレイプ・オフ層 (SOL) 領域
  - ダイバータ領域

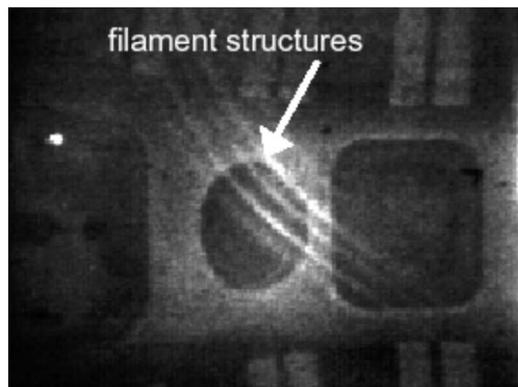


## “Plasma Blob 輸送” の報告

- ① 磁力線に沿ってフィラメント状
- ② 磁場を横切り対流的に輸送
- ③ SOLプラズマに比べ高密度



## ガスファイブリング (NSTX)



R.J. Maqueda *et al.*, Rev. Sci. Instrum. **72** (2001) 931.

- 径方向粒子束の50%程度を担う

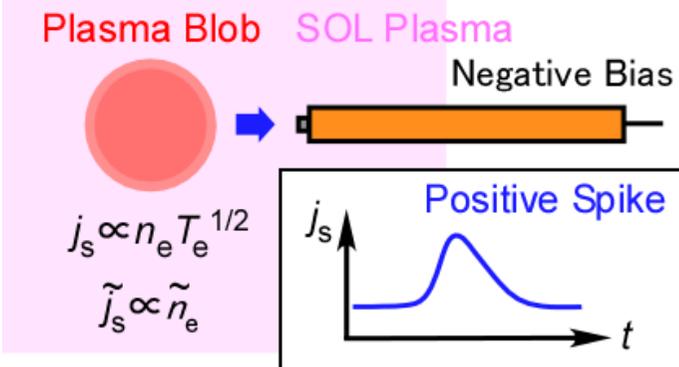
J.A. Boedo *et al.*, Phys. Plasmas **8** (2001) 4826.

- SOL中のプラズマ密度分布の平坦化

⇒ 周辺プラズマ中の諸現象に大きな影響

# Plasma Blobの計測

## 静電プローブ計測



種々の装置の周辺領域で計測されたイオン飽和電流

Y. Anter *et al.*, Phys. Plasmas **10** (2003) 419.

## Plasma Blob輸送

…局在した高密度プラズマ(フィラメント)の飛行現象

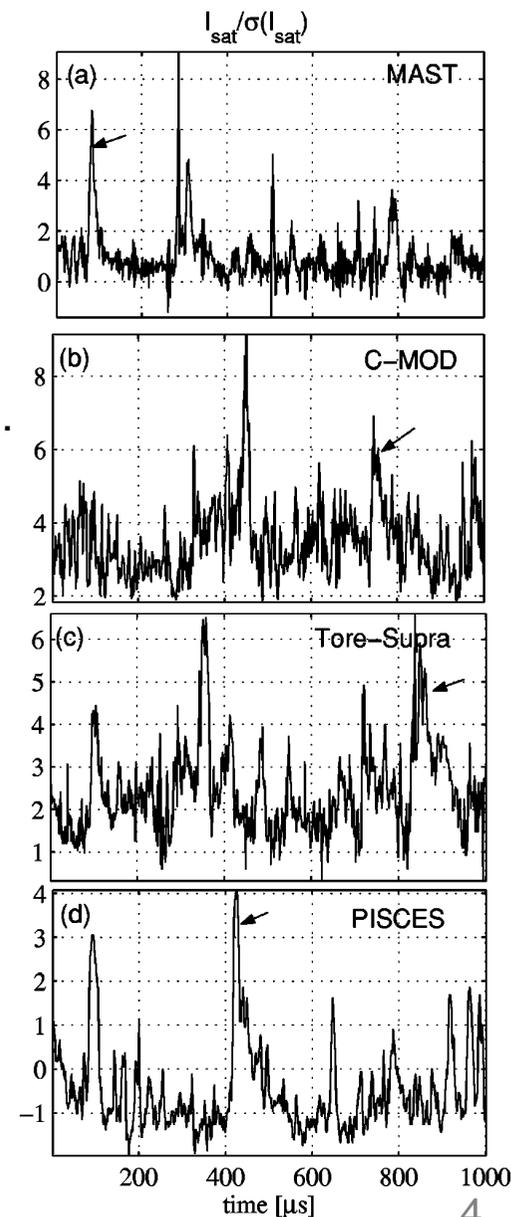
径方向サイズ: 5mm~3.9cm  
径方向速度: 250m/s~2.7km/s

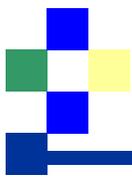
J.A. Boedo *et al.*, Phys. Plasmas **8** (2001) 4826.

G.S. Kirnev *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **46** (2004) 621.

➡ 各種信号中にはスパイク的な『揺らぎ』の形で検出される(密度は正スパイク)

持続時間: ~数十 $\mu$ s





# 揺動と統計的解析

揺らぎ(大辞林より引用)

(1)(省略)

(2)ある量が、平均値は一定であるが、瞬間的にはその平均値の近くで変動している現象。または、平均値からのずれ。期待の散乱、微視的な熱運動などにみられる。揺動。



統計的解析 ... 数値上の性質・規則性・不規則性を抽出

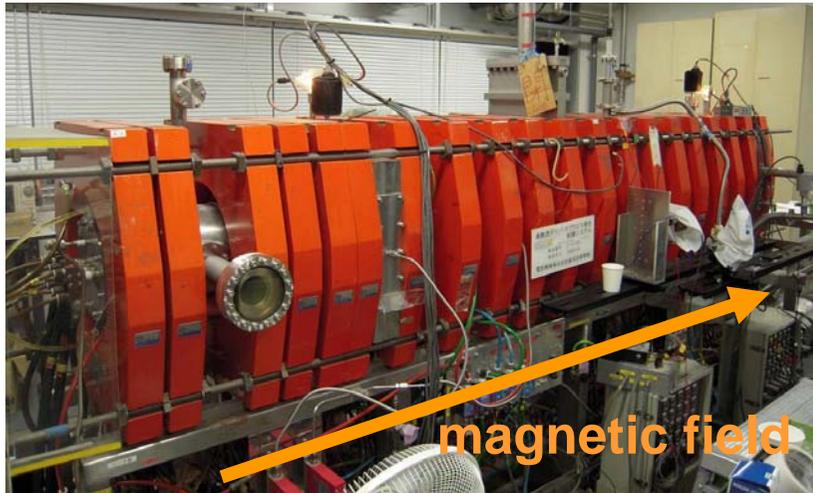
平均、標準偏差、Skewness、Flatness、確率密度関数、自己・相互相関、フーリエ・ウェーブレットスペクトル、コヒーレンス、条件付き平均、待ち・持続時間、構造関数、経験的固有直交展開、特異値分解、etc...

プラズマ分野における主な適用対象

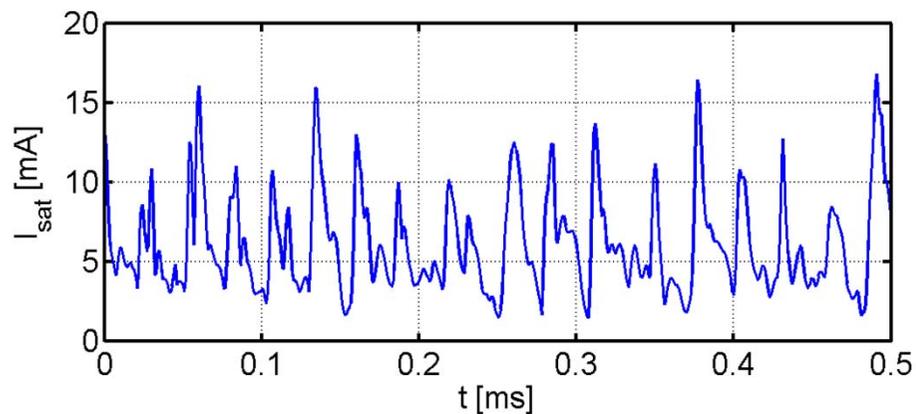
- ・A/D変換器で取得した時系列信号
  - ・放電番号ごとに整理されたデータベース
  - ・計算機の中で再現される時系列信号やデータベース
- } ← 比較

# 直線装置における揺動解析(単一信号)

## 直線装置NAGDIS-II(名大・大野研)



## 周辺位置( $r=20\text{mm}$ )で計測された イオン飽和電流



### 【主観的情報】

- ・揺れの真ん中は約5~8mA
- ・揺れの大きさは約10mA
- ・正にスパイク的に揺れている(真ん中から正に揺れている時間のほうが負に揺れている時間より短い)

↑変動の大きさに関する情報

- ・大きな揺れはほぼ等間隔で出現

↑時間・周期的な情報

- ・揺れの立ち上がりがより急峻

↑形状に関する情報

↑主観に基づくため  
説得力に乏しい

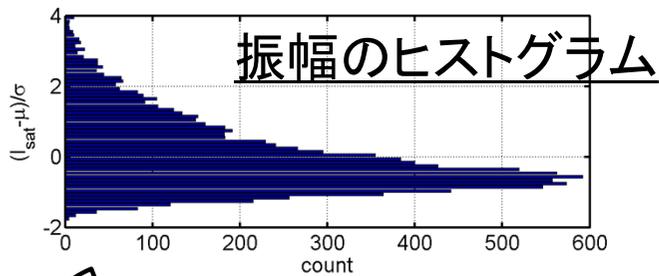
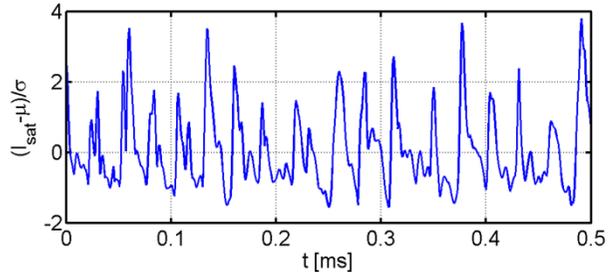
標本の数が多い

⇒統計的解析手法の導入

資料前半: 一般的なBlob輸送との比較

# 変動の大きさの特性: 要約統計量・確率密度関数

無次元化信号  $(I_{\text{sat}} - \mu) / \sigma$



平均、標準偏差

$$\mu \equiv \langle I_{\text{sat}} \rangle = 5.9 \text{ [mA]},$$

$$\sigma \equiv \langle (I_{\text{sat}} - \mu)^2 \rangle^{1/2} \\ = \langle \tilde{I}_{\text{sat}}^2 \rangle^{1/2} = 2.7 \text{ [mA]}$$

↑揺れ幅の指標

Skewness, Kurtosis

$$S \equiv \langle \tilde{I}_{\text{sat}}^3 \rangle / \langle \tilde{I}_{\text{sat}}^2 \rangle^{3/2} = 1.1,$$

↑PDFの左右対称性の指標

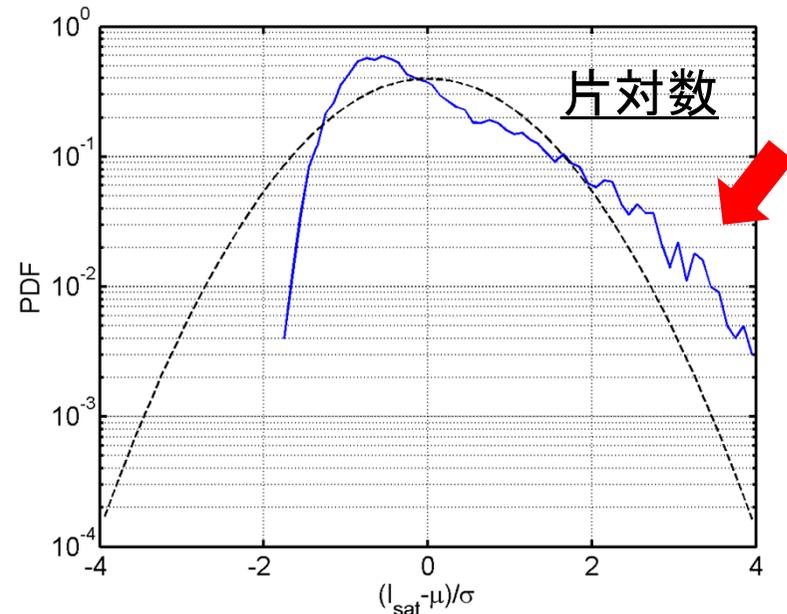
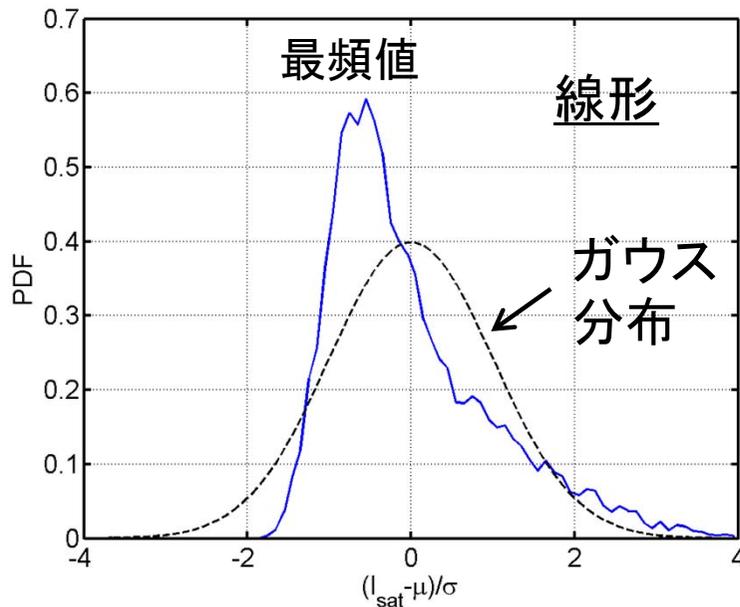
$$K \equiv \langle \tilde{I}_{\text{sat}}^4 \rangle / \langle \tilde{I}_{\text{sat}}^2 \rangle^2 - 3 = 1.0.$$

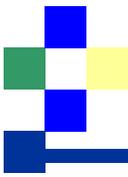
↑裾野の広がりの指標

正スパイク波形の出現  $\Rightarrow$  Skewness  $> 0$

確率密度関数(Probability Density Function: PDF)

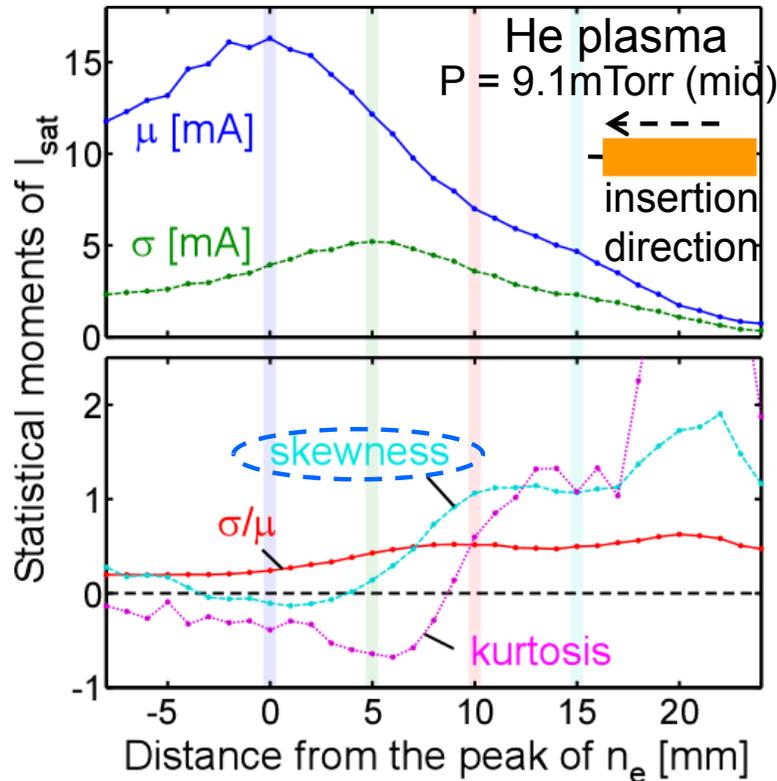
正規化  
(積分=1)



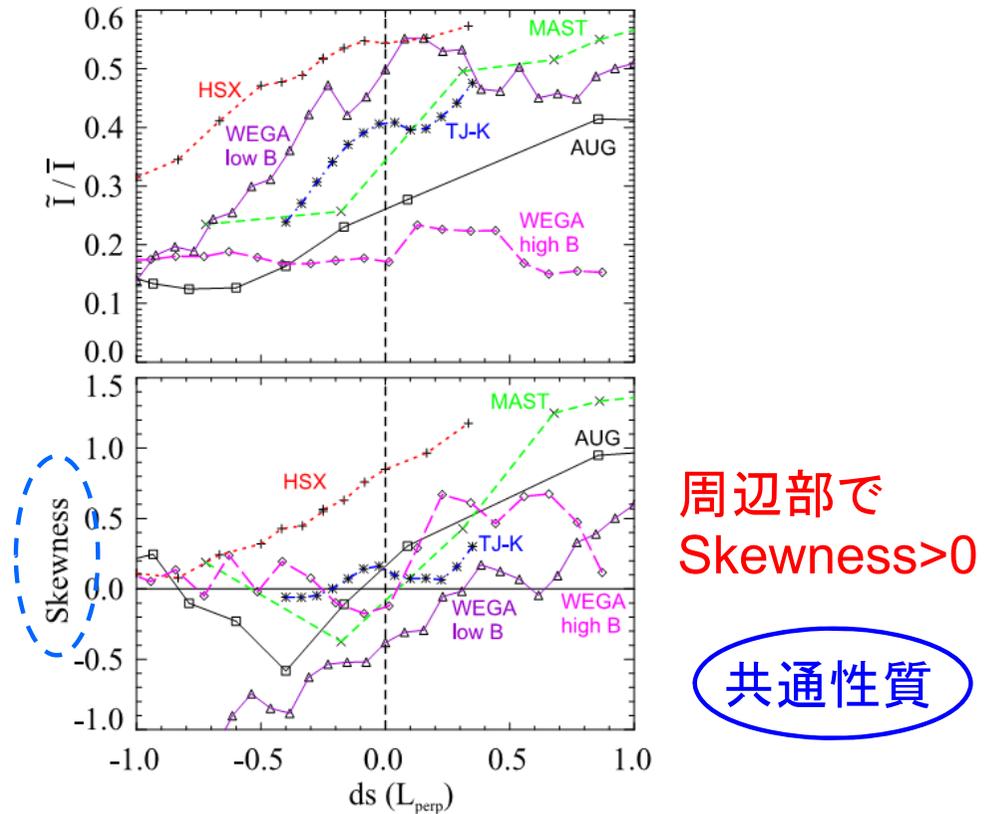


# 統計量の径方向分布比較

## NAGDIS-IIの統計量径分布



## 各種装置のLCFS近傍の統計量径分布



B. Nold *et al.*, Proc. 37<sup>th</sup> EPS Conf. (2010) P1. 1073.

## 確率密度関数型 (PDF型) のより詳細な解析

- ・各種分布 (対数正規分布、ガンマ分布等) との比較
- ・Gram-Charlier 級数展開 (エルミート多項式による PDF 型の直交展開)
- ・カルバックライブラーのダイバージェンス (PDF 型同士の比較)

# 時間的な特性: 自己相関・パワースペクトル

## 自己相関関数

$$C(\tau) = \langle x(t)x(t+\tau) \rangle$$

フーリエ変換

## フーリエ級数

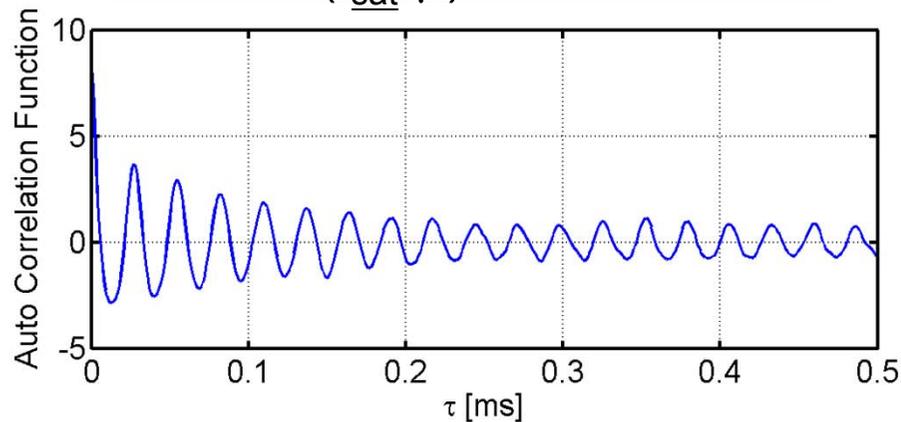
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

絶対値2乗/解析区間

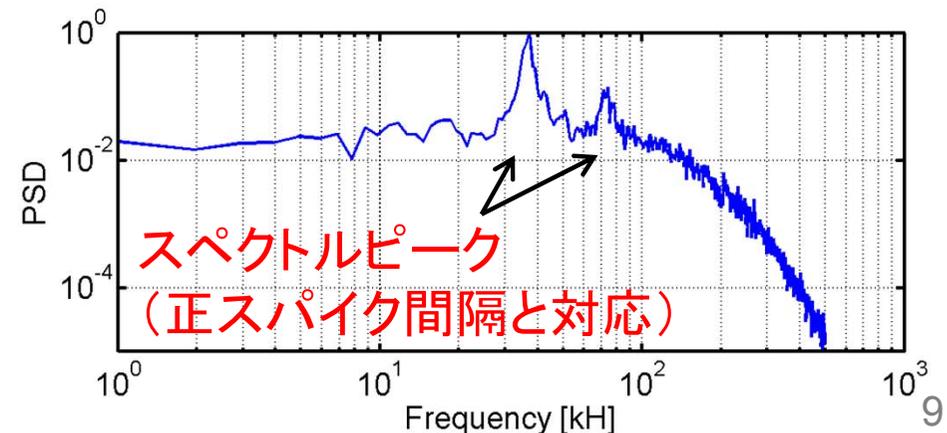
## パワースペクトル密度

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} |X(f)|^2 \right)$$
$$S'(f) \equiv 2S(f) \Big|_{f>0}$$

## 揺動成分( $I_{\text{sat}} - \mu$ )の自己相関関数



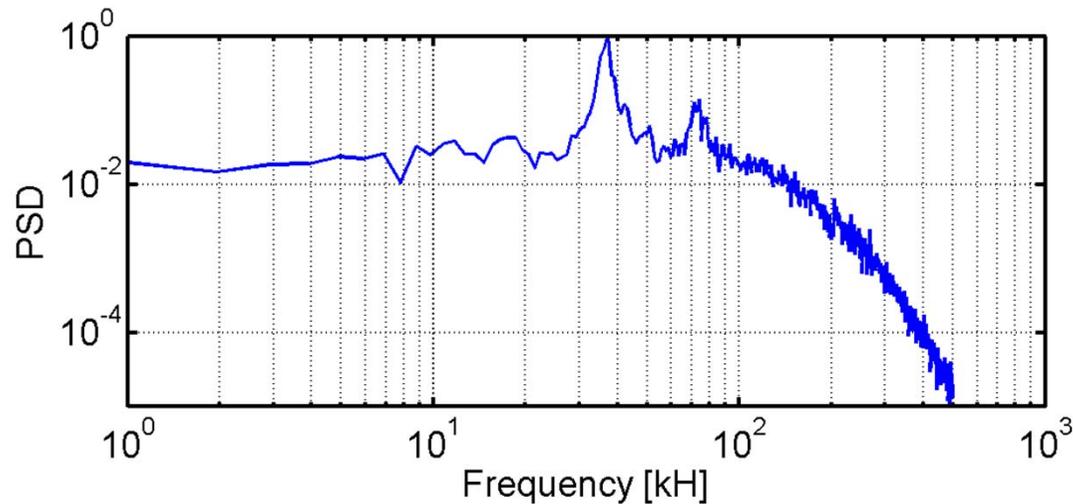
## パワースペクトル密度 $S'$ (one-sided)



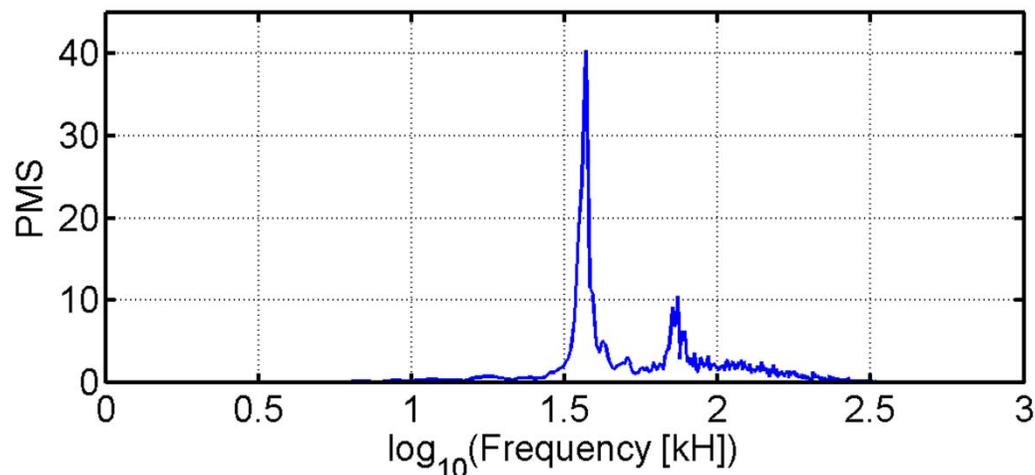
# Pre-Multiplied Spectrum (PMS)

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} |X(f)|^2 \right), \quad S'(f) \equiv 2S(f)|_{f>0}$$

パワースペクトル密度  $S'$  (one-sided)



Pre-Multiplied Spectrum



$S'(f)$ は $f>0$ の成分を積分すると分散(標準偏差の2乗)と一致

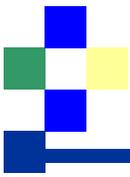
$$\sigma^2 = \langle x^2(t) \rangle = \int_0^{\infty} S'(f) df,$$

where  $\langle x \rangle = 0$

$$\frac{d(\log f)}{df} = \frac{1}{f} \quad (\because f \geq 0)$$

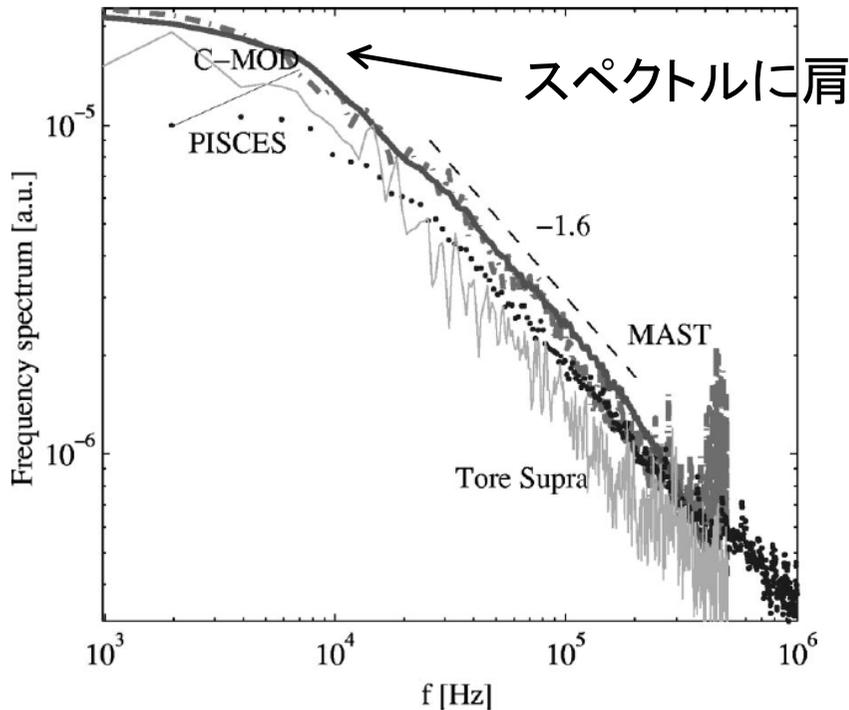
$$\therefore \int_0^{\infty} S'(f) df = \int_0^{\infty} f S'(f) d(\log f).$$

低周波側のスペクトルピークの方が分散への寄与率が高い



# パワースペクトル比較

種々の装置で計測されたスパイク的揺動のパワースペクトル

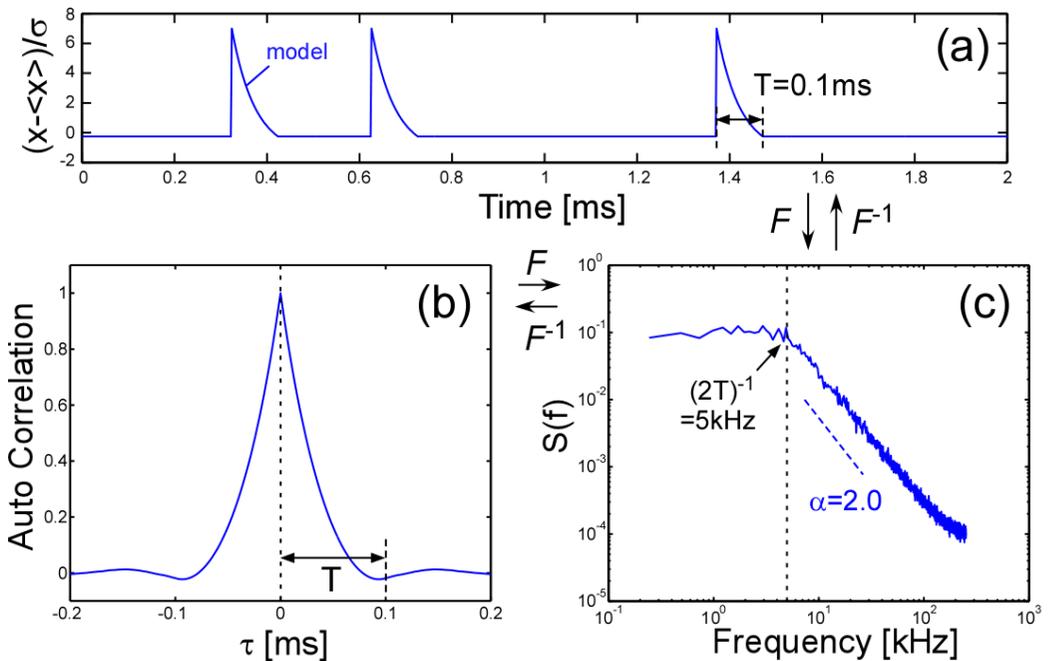


Y. Anter et al., Phys. Plasmas **10** (2003) 419.

相違

非周期的かつ持続時間ほぼ一定の揺動が支配的なとき出現

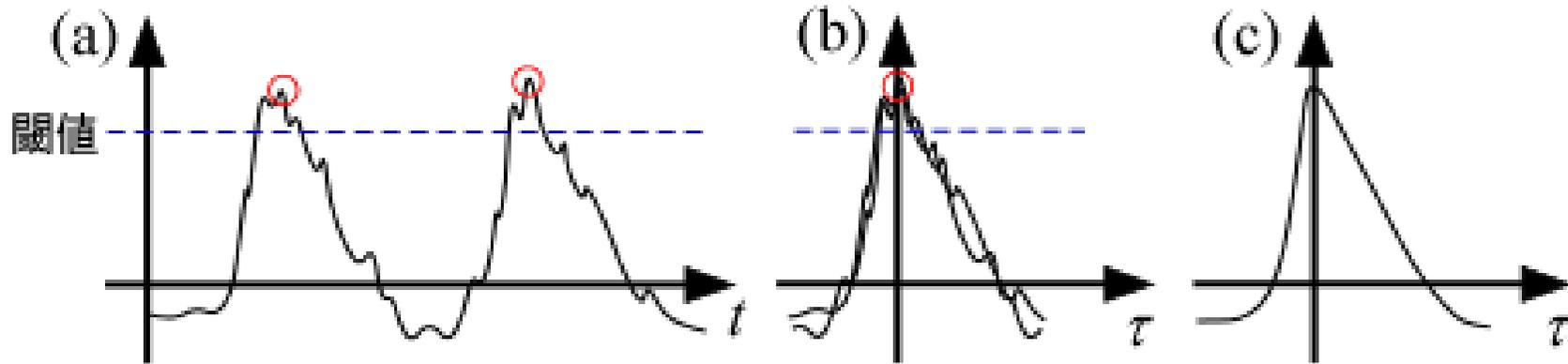
(a)モデル波形の (b)自己相関係数と (c)規格化パワースペクトル



H. Tanaka et al., Nucl. Fusion **49** (2009) 065017.

# 形状の特性: 条件付き平均

条件付き平均法適用の模式図

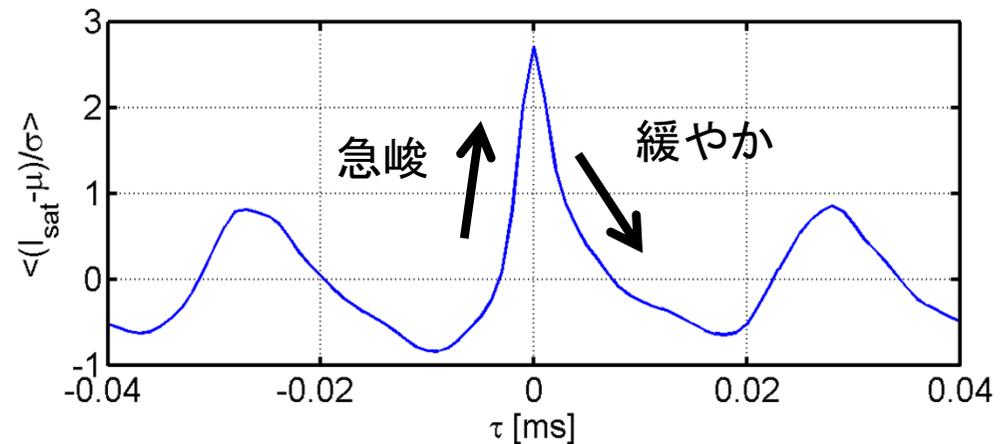


(a)指定した“条件”でスパイク揺動を切り出して  
⇒(b)“基準点”で集めて  
⇒(c)平均化

## 共通性質

プラズマ構造前面の急峻な密度勾配と後方の緩やかな密度勾配と対応

閾値2を超えるスパイク波形のピークを中心として平均化した条件付き平均波形



# 単一信号解析のまとめ

## 【主観的情報】

- ・揺れの真ん中は約5~8mA
- ・揺れの大きさは約10mA
- ・正にスパイク的に揺れている(真ん中から正に揺れている時間のほうが負に揺れている時間より短い)

↑変動の大きさに関する情報

- ・大きな揺れはほぼ等間隔で出現

↑時間・周期的な情報

- ・揺れの立ち上がりがより急峻

↑形状に関する情報

## 【説得力を持たせた情報】

平均、標準偏差、Skewness、Flatness、確率密度関数

周辺部で正スパイク・・・共通

自己相関、パワースペクトル

周期的に発生・・・相違

条件付き平均

急峻な立ち上がりと緩やかな立下り・・・共通

## 単一の時系列信号解析の限界

空間的な位相関係、他の物理量との関係が不明  
・・・物理的な描像を十分得るまでには至らない

# 複数信号の解析

## 単一信号の解析手法

確率密度関数

自己相関、パワースペクトル

条件付き平均



## 複数信号の解析手法

結合確率密度関数

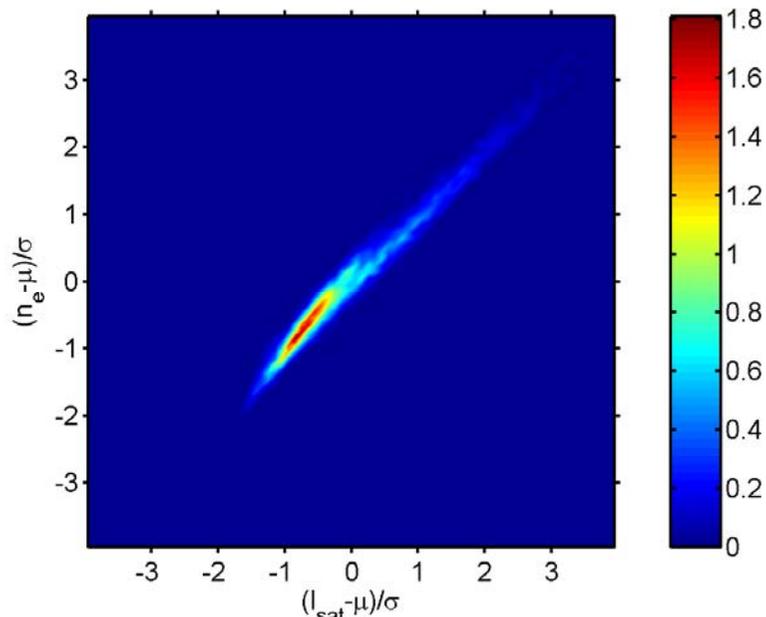
相互相関、クロススペクトル

(相互)条件付き平均

多変量解析

コヒーレンス

## $I_{\text{sat}}$ と $n_e$ の結合確率密度関数



対象とする複数信号:

- 異なる物理量 → 物理量同士の依存性
- 異なる計測位置 → 空間挙動

$I_{\text{sat}}$ と $n_e$ の揺動はどの振幅でもおおよそ比例関係にあることがわかる

# 相互相関・クロススペクトル・コヒーレンス

## 相互相関関数

$$C_{xy}(\tau) = \langle x(t)y(t+\tau) \rangle$$

フーリエ変換

揺動の時間遅れ  
算出に便利

## フーリエ級数

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt,$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-i2\pi ft) dt$$

絶対値2乗/解析区間

## クロススペクトル

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\tau) \exp(-i2\pi f\tau) d\tau = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} X^*(f) Y(f) \right)$$

$$S'_{xy}(f) \equiv 2S_{xy}(f) \Big|_{f>0}$$

周波数ごとの位相差計算に使用

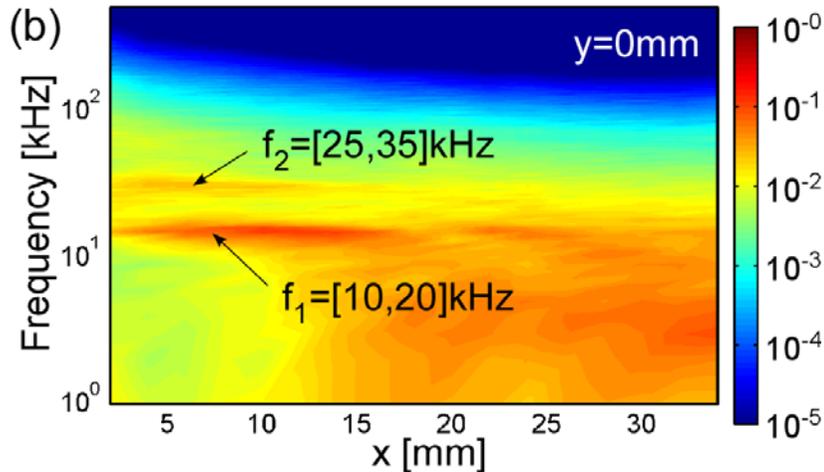
## コヒーレンス

$$\text{coh}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)}, \quad 0 \leq \text{coh}^2(f) \leq 1.$$

周波数成分ごとの位相差が  
常に一定かどうかを評価

# フーリエフィルタ＋時空間相関解析

規格化パワースペクトル(y=0mm)



2本の静電プローブによる $I_{\text{sat}}$ 揺動の挙動解析

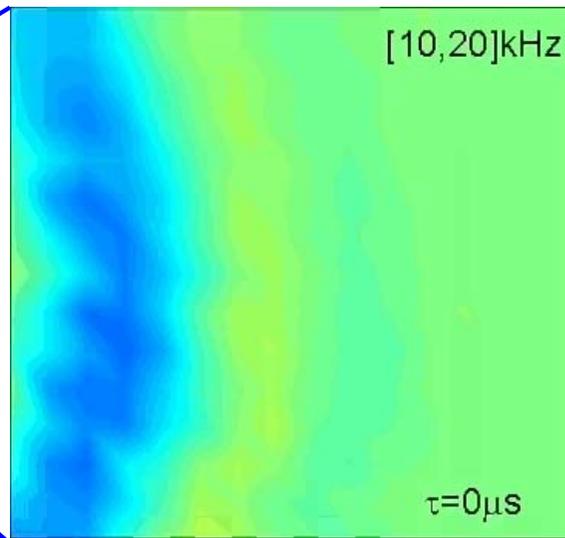
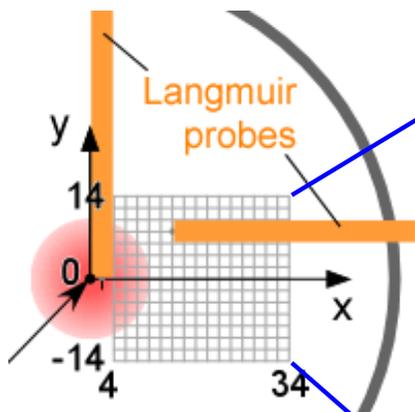
フーリエフィルタ

$$I = \bar{I} + \tilde{I} = \bar{I} + \tilde{I}_f + I_b$$

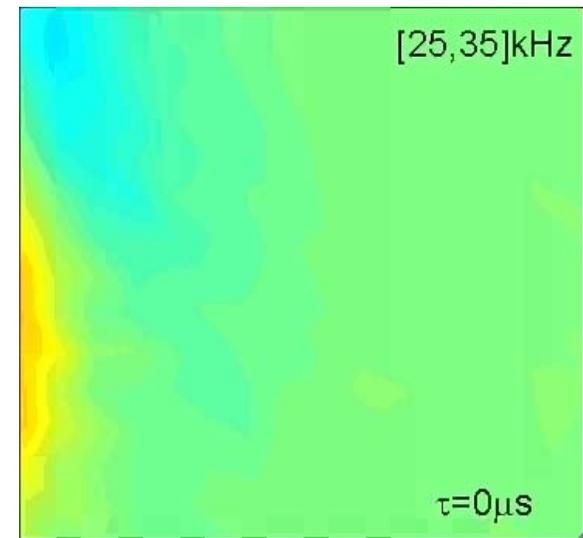
時空間相関関数

$$C_{ij}^f(\tau) \equiv \langle I_f(x_i, t) \tilde{I}(x_j, t + \tau) \rangle$$

時空間相関関数



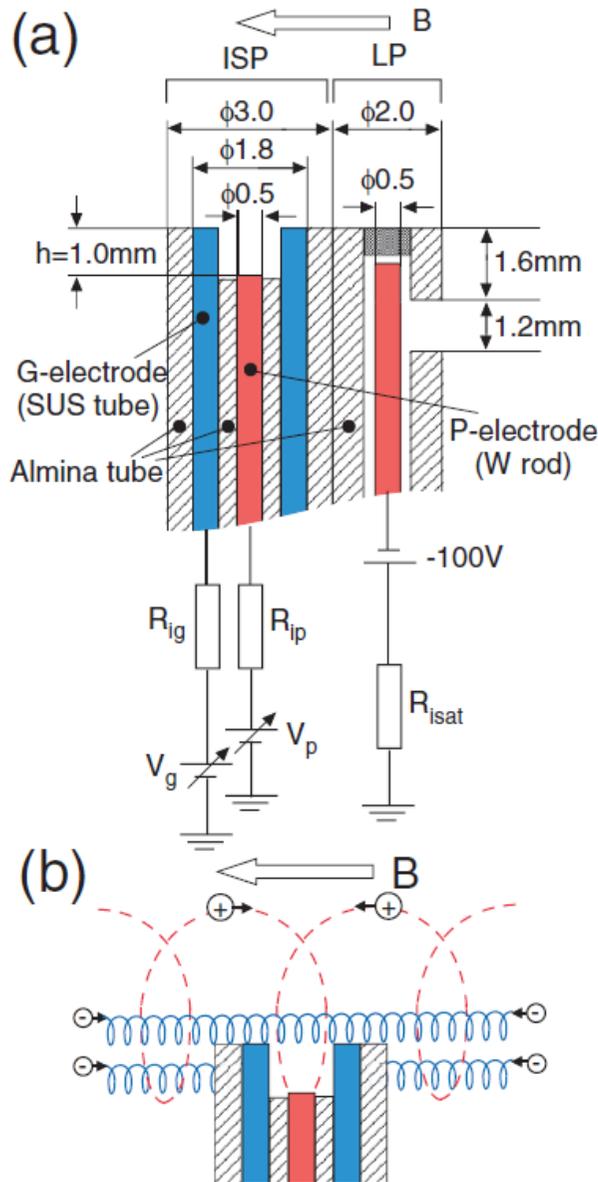
$f_1=[10,20]\text{kHz}$



$f_2=[25,35]\text{kHz}$

# 条件付き抽出によるプラズマ構造のパラメータ評価

## 複合プローブ模式図

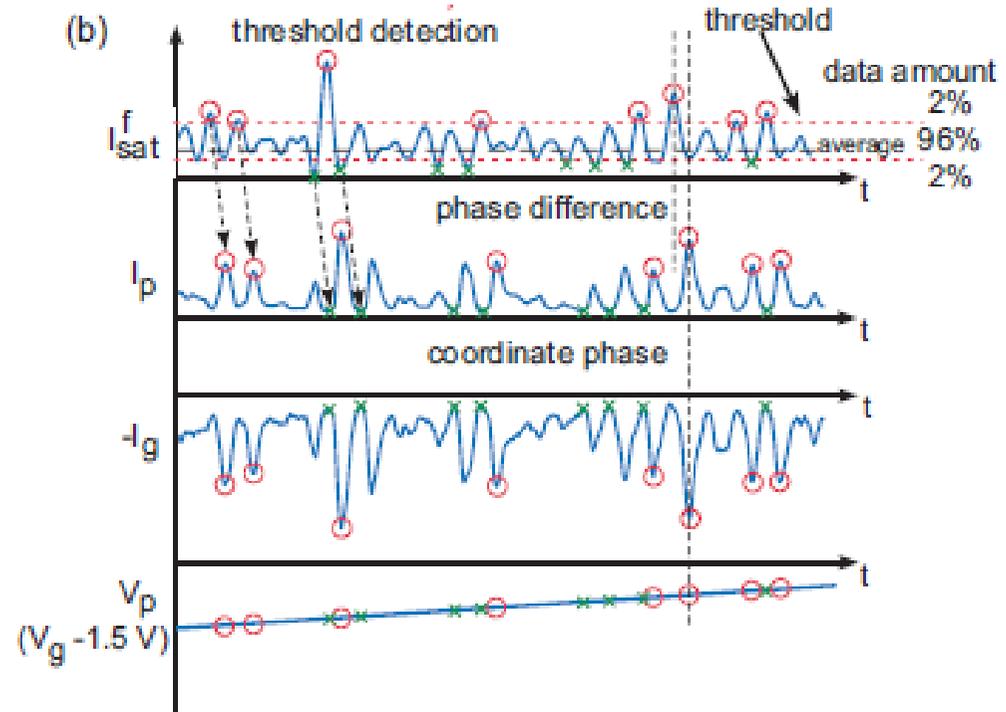


Blobが運ぶ熱流束評価にはイオン温度計測が重要

イオン温度計測には数ms程度必要

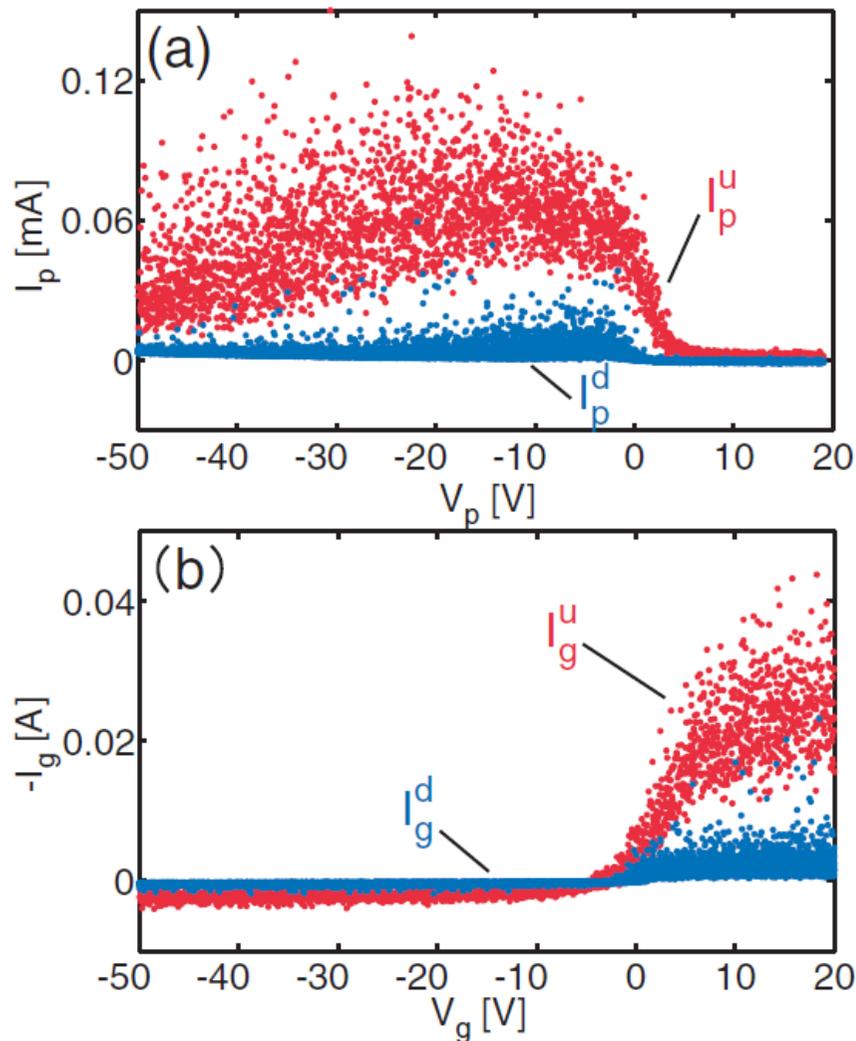
≫ スパイク揺動の持続時間(数十 $\mu$ s)

イオンセンシティブプローブとシングルプローブを同時に用いたプラズマ構造のパラメータ計測

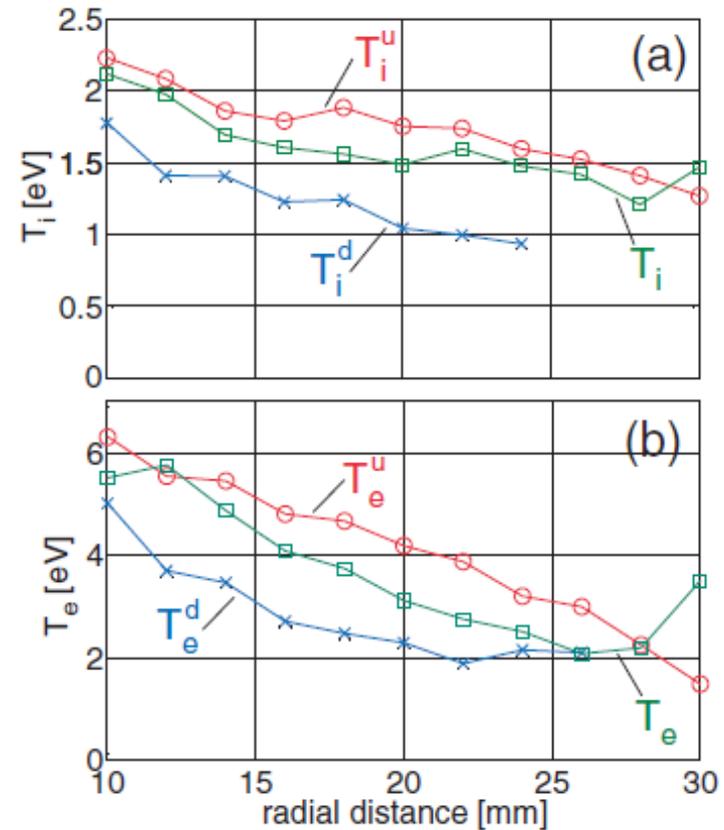


# プラズマ構造内外のパラメータ計測結果

(a)イオンコレクタ、(b)ガード電極における電流電圧特性



プラズマ構造内外の(a)イオン温度、(b)電子温度



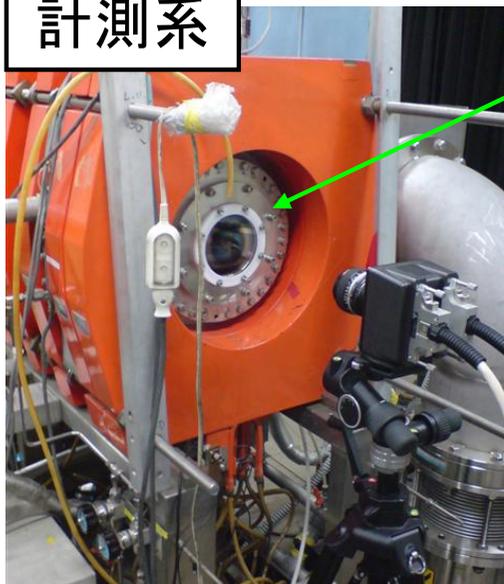
参考: 減速電界型エネルギー分析器 (RFA)におけるイオン温度計測

M. Kočan *et al.*, Plasma Phys.

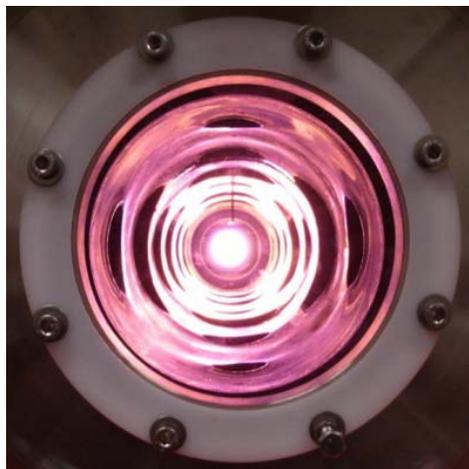
Control. Fusion **54** (2012) 085009. <sup>18</sup>

# 高速カメラデータ解析

計測系



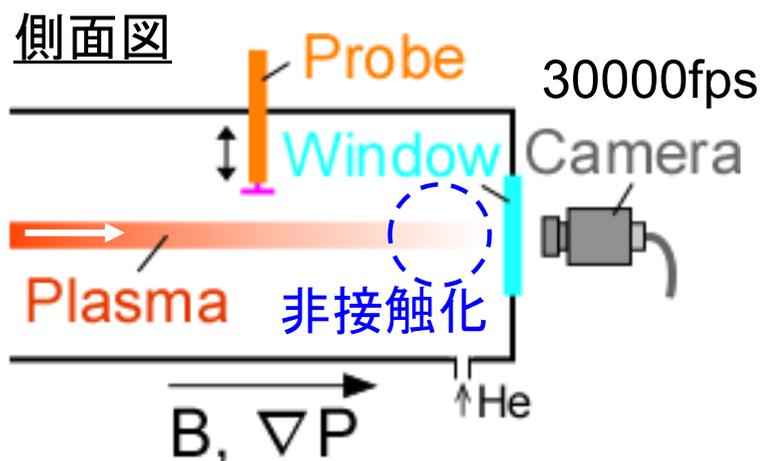
装置終端部に計測窓を設置



高速カメラデータ  
・・・多点同時計測信号

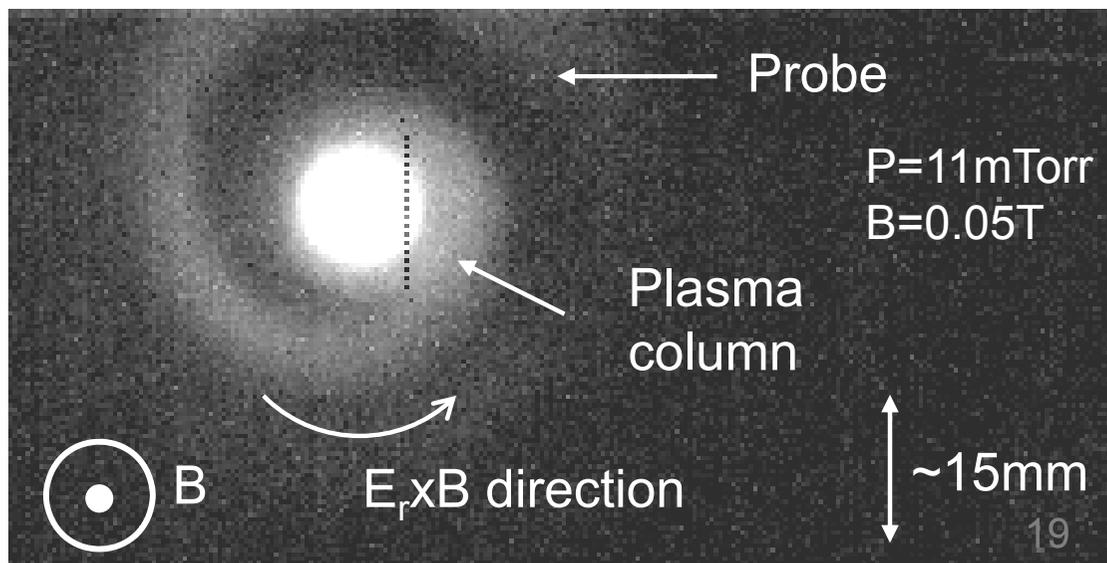
○装置後方からの高速カメラ計測  
⇒ 磁場と垂直な面内における  
プラズマ挙動を観測

磁場直交面の高速カメラ計測



計測結果

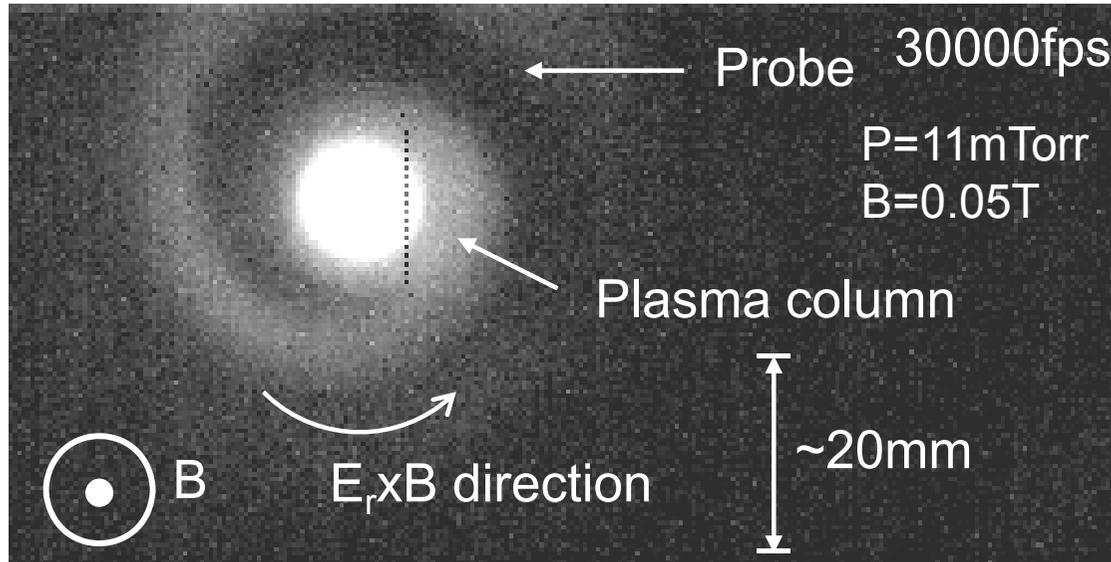
128x256pixel (~54x108mm<sup>2</sup>)



# 非接触プラズマ中のプラズマ発光の動的挙動

## 計測結果

128x256pixel (~54x108mm<sup>2</sup>)

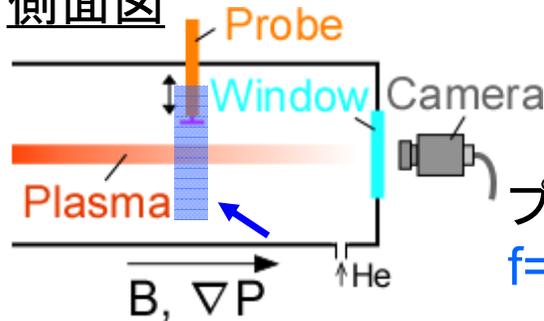


周辺領域でスパイラル状の  
プラズマ発光の回転を観測

回転方向:  $E \times B$ ドリフト方向

プローブおよび高速カメラ計測信号  
のパワースペクトル (B=50mT)

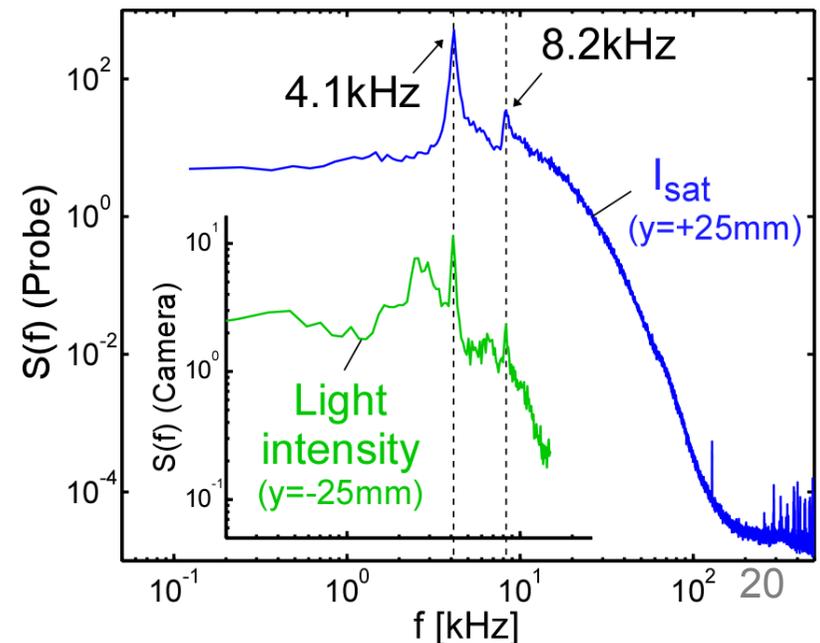
## 側面図



プローブ・高速カメラともに  
 $f=4.1\text{kHz}$ ,  $8.2\text{kHz}$ にピーク



焦点面内におけるプラズマ揺動を反映



# 多変量解析手法の導入

## 経験的固有直交展開 (Proper orthogonal decomposition: POD)

- 多変量解析手法の一つ
- 経験的直交関数系展開 (Empirical orthogonal function: EOF), Karhunen-Loève (K-L) 展開とも呼ばれる
- 共分散行列の固有値分解により得られる

$$\tilde{I}(x, t) = a_1(t)\phi_1(\mathbf{x}) + a_2(t)\phi_2(\mathbf{x}) + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k(t)\phi_k(\mathbf{x}).$$

orthogonal  
basis for  
time

orthonormal  
basis for a  
space domain

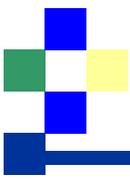
$\mathbf{C}\phi_i = \lambda_i\phi_i$ ,  $\mathbf{C}$ : covariance matrix

$$C_{ij}(\tau) = \langle \tilde{I}(x_i, t)\tilde{I}(x_j, t + \tau) \rangle$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11}(0) & C_{12}(0) & \dots & C_{1n}(0) \\ C_{21}(0) & C_{22}(0) & \dots & C_{2n}(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1}(0) & C_{n2}(0) & \dots & C_{nn}(0) \end{pmatrix}$$

$$a_i(t) = \sum_{k=1}^n \tilde{I}(x_k, t)\phi_i(x_k),$$

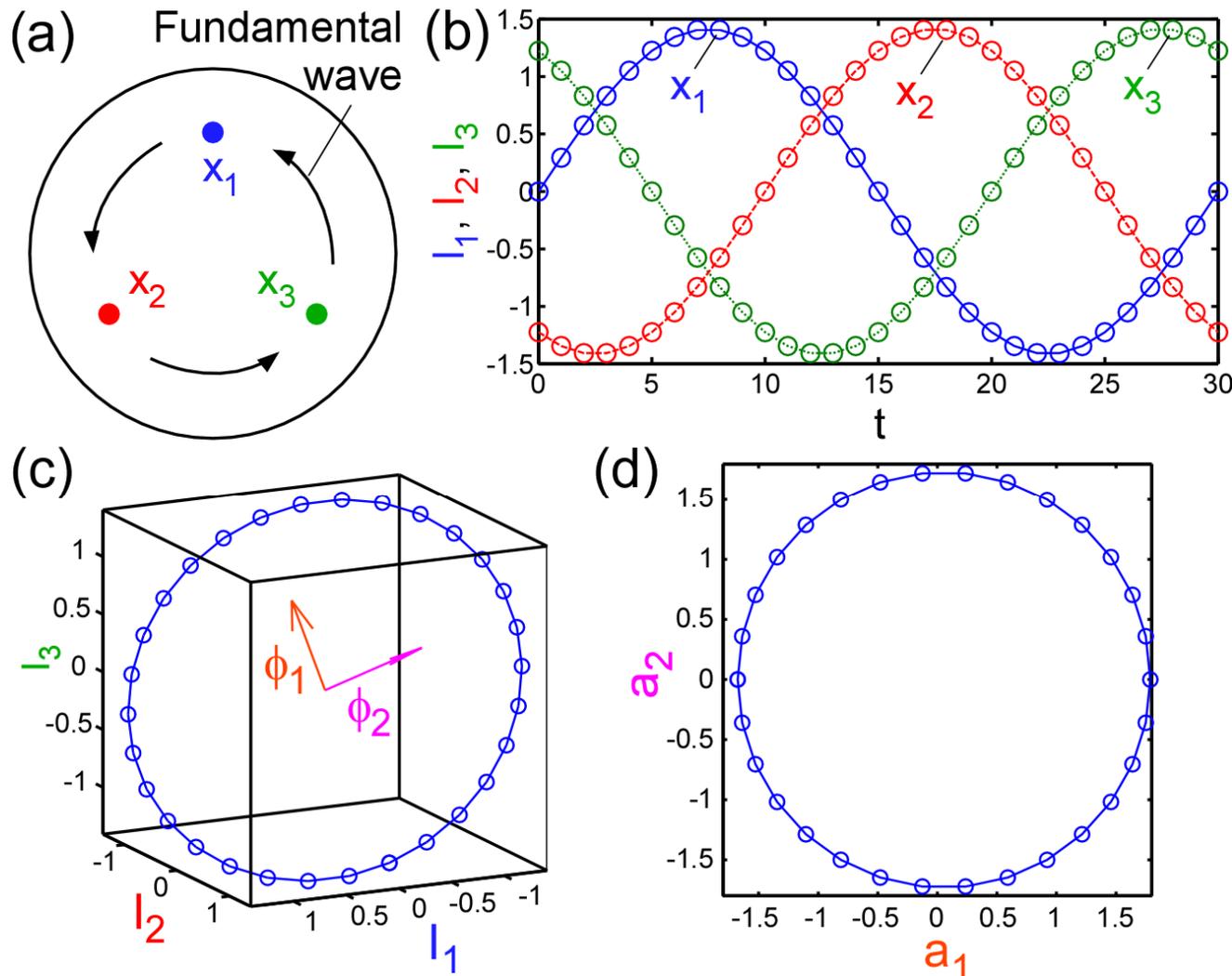
$$\|\phi_i\| = 1 \quad \langle a_i^2 \rangle = \lambda_i$$



# POD法適用の例

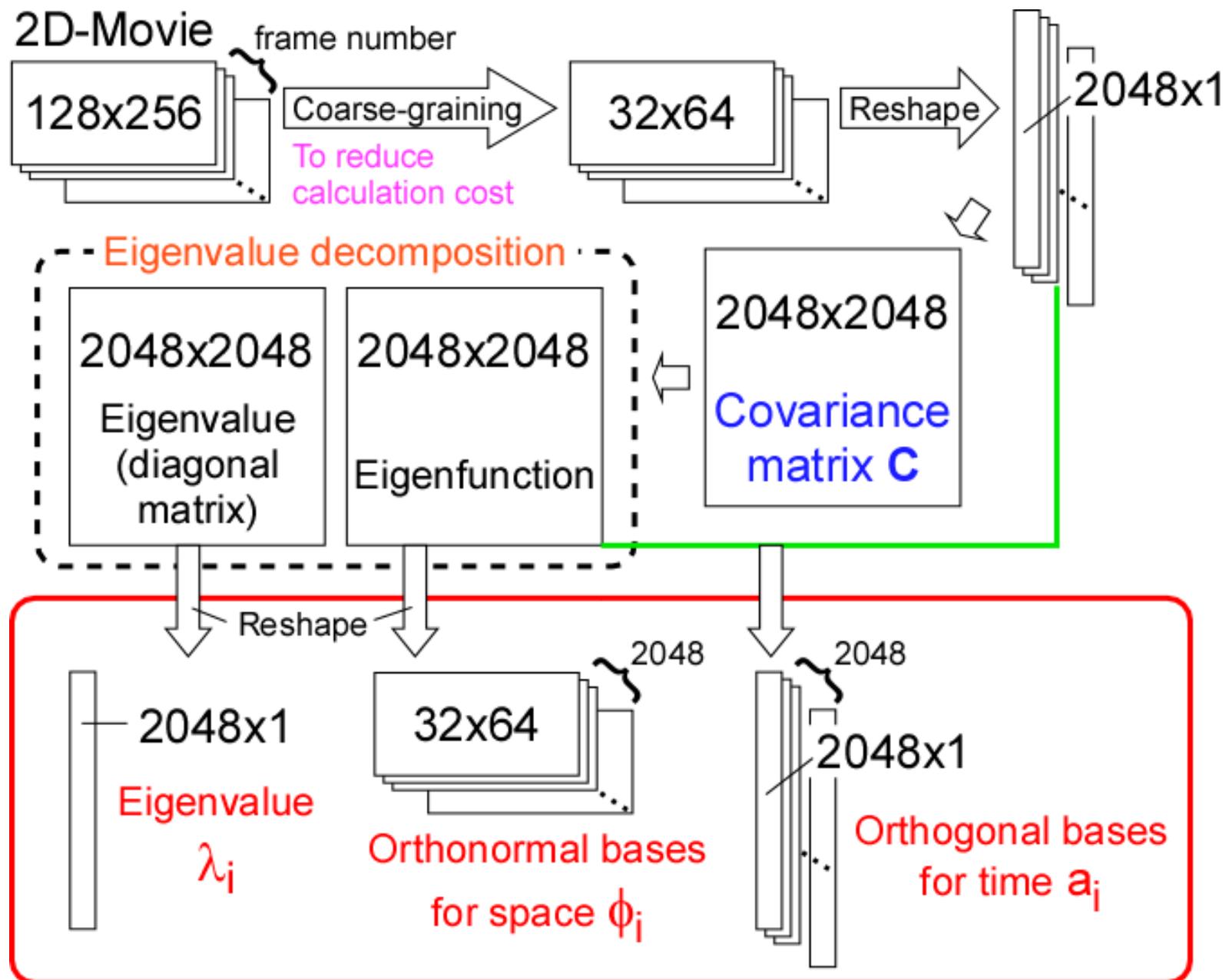
(a)計測位置、(b)計測信号、(c)振幅の3次元空間への描画と空間の基底φ、(d)空間の基底軸上における時間の基底

$$\tilde{I}(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \phi_k(\mathbf{x}).$$



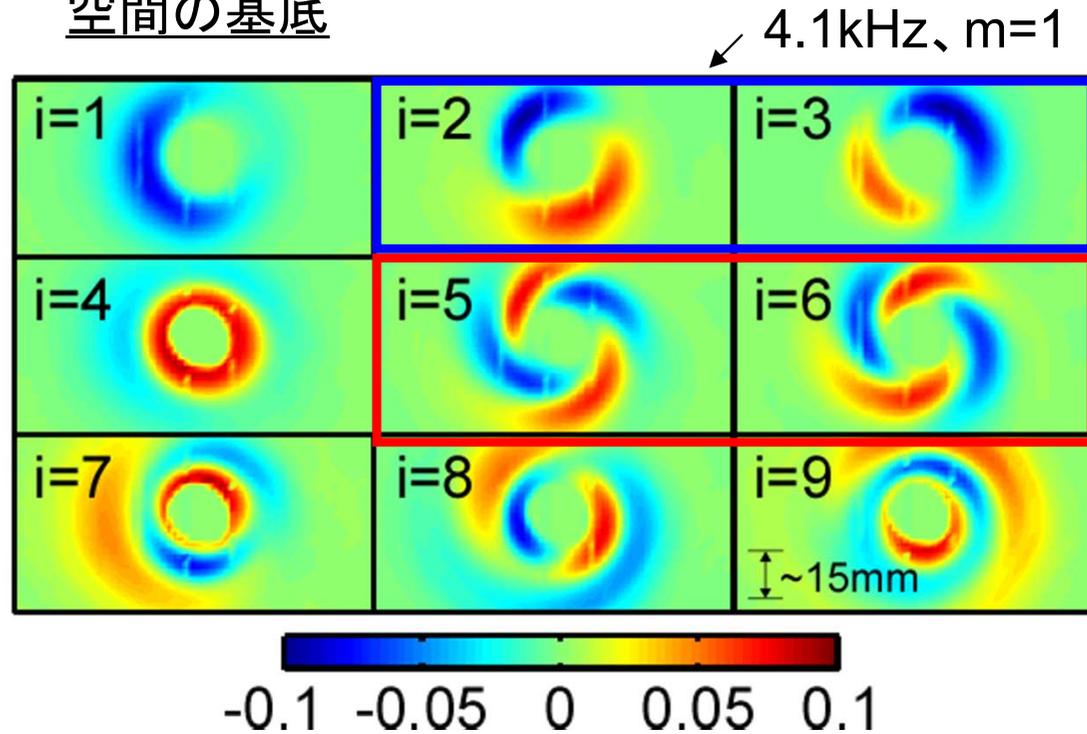
単純な回転挙動  
...2つの空間・時間の  
基底に分解される

# 動画の解析アルゴリズム



# POD法によるモード構造の抽出

## 空間の基底

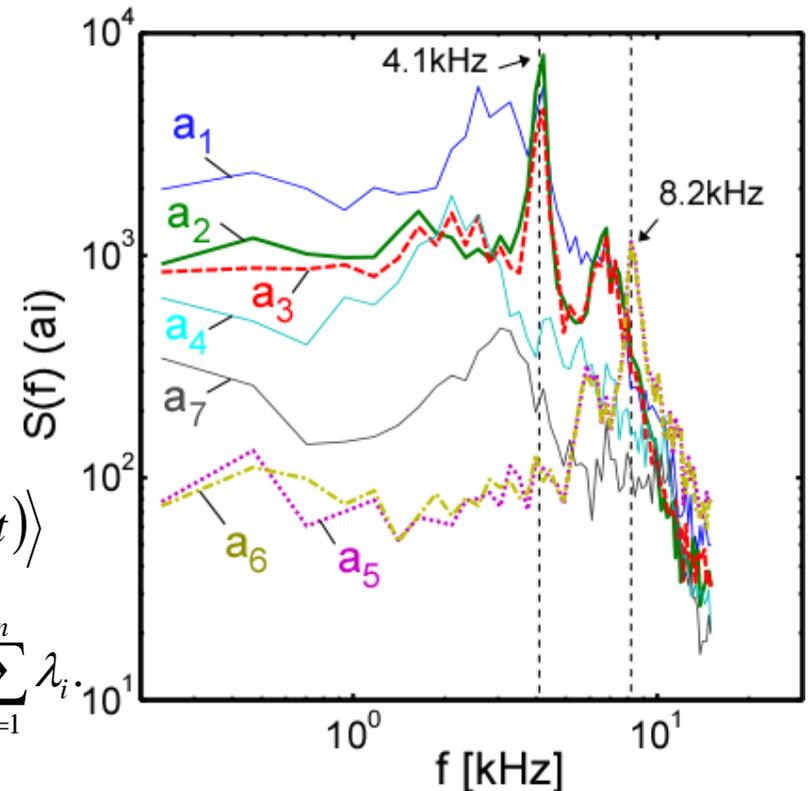


H. Tanaka *et al.*, Contrib. Plasma Phys. **50** (2010) 256.

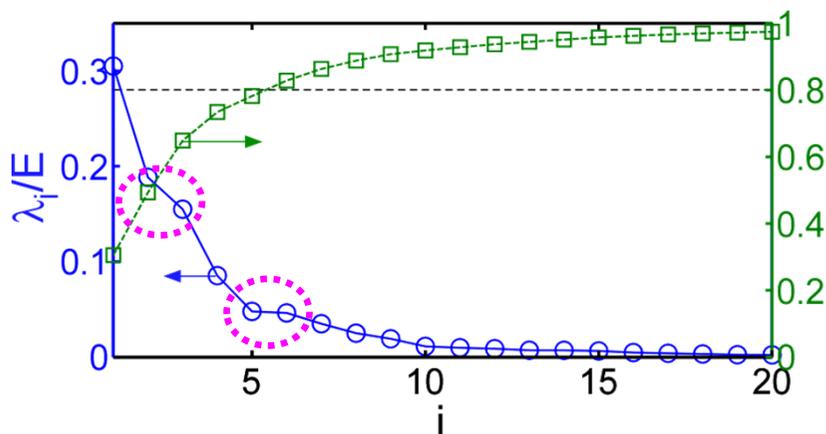
モード数  $m=1, 2$  の構造が2つのスペクトルピークに対応

← 8.2kHz,  $m=2$

## 時間の基底のパワースペクトル



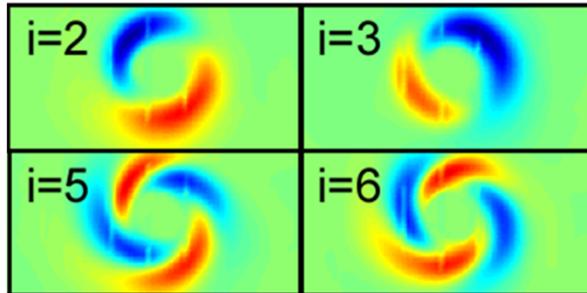
## 各基底の分散への寄与率



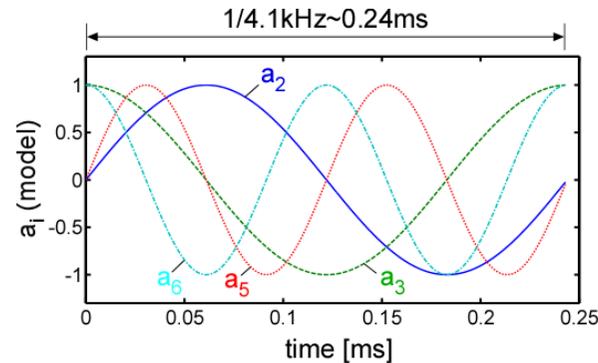
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \lambda_k / E &\equiv \sum_{k=1}^n \langle \tilde{I}^2(x_k, t) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle a_i^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \end{aligned}$$

# 有意な基底を用いた揺動の再構成

空間の基底  $\phi_i(x)$

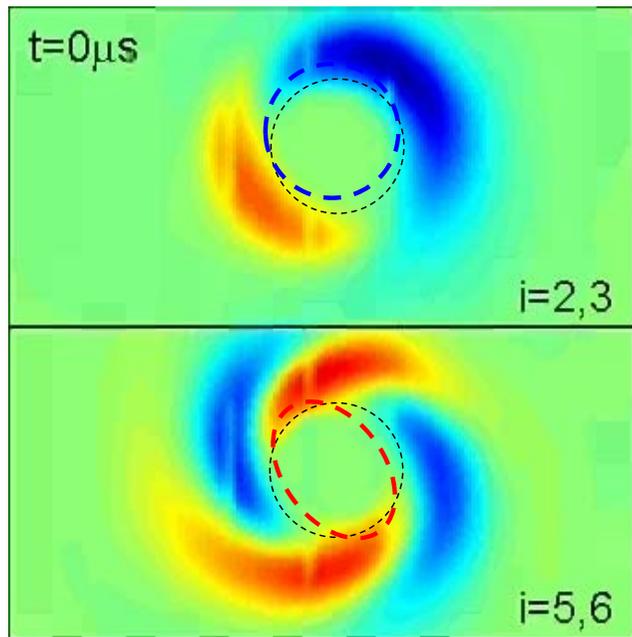


高時間分解能モデル波形



$a_2, a_3$ : sine and cosine wave ( $f=4.1\text{kHz}$ )  
 $a_5, a_6$ : sine and cosine wave ( $f=8.2\text{kHz}$ )

再構成動画 ( $i=2+3, 5+6$ )



$$\begin{cases} \tilde{I}_{2+3}(x, t) = a_2(t)\phi_2(x) + a_3(t)\phi_3(x) \\ \tilde{I}_{5+6}(x, t) = a_5(t)\phi_5(x) + a_6(t)\phi_6(x) \end{cases}$$

一つの構造の回転

二つの構造の回転

$$\tilde{I}(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t)\phi_k(\mathbf{x}).$$

# 複数信号解析のまとめ

## 単一信号の解析手法

確率密度関数

自己相関、パワースペクトル

条件付き平均

## 複数信号の解析手法

結合確率密度関数

相互相関、クロススペクトル

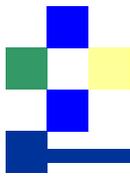
(相互)条件付き平均

コヒーレンス

多変量解析



- ・異なる二つの物理量の相関の取得
- ・異なる時系列信号を一つの時間軸に対して統一化
- ・速い現象のパラメータ計測
- ・仮定を置かないモード構造の抽出



## まとめ

---

- 統計的解析手法は、抽出したい特徴に応じて様々な種類のものがある
- 揺らぎ(揺動)のもつ特徴を説明する際に説得力を持たせることができる有用なツール
- うまく使うことで計測の不備不足を補える

Matlab公開プログラムのURL

<http://www.ees.nagoya-u.ac.jp/~koukai/purakaku85/>