バルーニングモードの連続スペクトルに属する一般化固有関数の近似

古川勝（東大新領域）

共同研究者: 吉田善章（東大新領域）、徳田伸二（原研計算科学）

トカマクにおける高 n MHDバルーニングモード（n: トロイダルモード数）のトロイダル回転シアによる安定化機構について研究を行っている。バルーニングモードの時間発展は、トロイダル回転シアのために単なる指数関数型とはならず、安定／不安定フェーズを交互に繰り返し、不安定フェーズに摂動エネルギーが減衰することが、モードの安定化効果をもたらすことを明らかにした [1]。しかし、トロイダル回転シアが、どのようにして減衰を起こすのかは未解明であった。これを明らかにするのが研究目的である。

一般論としては、波動現象を研究する際にはスペクトル解析が有効である。例えば、1次元波動方程式 $\partial^2\xi/\partial t^2 = \partial^2\xi/\partial x^2$ を、有限領域に局在化した初期値に対して解き $\xi(x,t)$ を求めたときに、$\sin kx$ 及び $\cos kx$ で $\xi(x,t)$ を展開すれば、波数 k をもつ波の成分がどのように時間発展するかを捉えることが出来る。$\sin kx$ や $\cos kx$ はエルミート演算子 $\partial^2/\partial x^2$ の固有関数であるから、バルーニングモードの場合も同様に、モードの時間発展を特徴付ける演算子の固有関数系で展開すればよいと考えられる。

トロイダル回転トカマクにおける理想MHDバルーニングモードを記述する方程式は、

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - U\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) = \mathcal{L}\xi, \qquad \mathcal{L}\xi := \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(f\frac{\partial\xi}{\partial\vartheta}\right) - g\xi \tag{1}$$

となっており（1次元波動方程式で、$\bar{\rho}$, U, f, g は磁力線方向の座標 $\vartheta \in (-\infty,\infty)$ と時間 t の関数）[2]、バルーニングモードの特徴はエルミート演算子 $\mathcal{L}$ に詰め込まれている。従って、(1) 式を ϑ 空間で局在した初期値に対して解き $\xi(\vartheta,t)$ を求めたときに、$\mathcal{L}$ の固有関数系で ξ を展開すれば良いであろうと考えられる。しかし、$\mathcal{L}$ のスペクトルを固有値問題 $\mathcal{L}\varphi = -\lambda\bar{\rho}\varphi$ によって定義すると、λ は連続スペクトルをもち、それに属する一般化固有関数のノルム $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vartheta\bar{\rho}|\varphi|^2$ は発散する。理論的には、このような一般化固有関数も使えば任意の自乗可積分な関数を展開できる（von Neumann の定理）が、数値計算では扱えないなど、現実的なトカマクプラズマを対象とした場合には困難がある。

本研究では、この一般化固有関数を正則な固有関数に近似する手法を開発し、その適用範囲を考察した。我々は、重み関数を修正した固有値問題

$$\mathcal{L}\psi = -\lambda\bar{\rho}h\psi \tag{2}$$

を導入し、h を ϑ 空間の遠方で $\propto |\vartheta|^{-4}$、それ以外では 1 となる滑らかな関数に選べば、λ が点スペクトルのみになることを見出した。すると、$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vartheta\bar{\rho}h|\psi|^2$ が有界となり、$\xi = \sum_j a_j\psi_j$ と展開して a_j を数値的に求めることが出来る。この手法により、トロイダル回転シアがバルーニングモードを安定化するメカニズムを不安定モードから安定モードへのエネルギー移送として捉えることに成功している [3]。本講演では、重み関数を修正した物理的意味を明らかにし、近似固有関数の適用範囲を時間スケールの観点から考察する。

[1] M. Furukawa, S. Tokuda and M. Wakatani, Nucl. Fusion **43**, 425 (2003).

[2] M. Furukawa and S. Tokuda, 13th Int. Toki Conf. (Toki, Japan, 2003).

[3] M. Furukawa and S. Tokuda, Submitted to Phys. Rev. Lett.