バルーニングモードの連続スペクトルに属する一般化固有関数の近似

古川勝(東大新領域)

共同研究者:吉田善章(東大新領域)
徳田伸二(原研計算科学)

研究背景

- トカマクにおける高nバルーニングモードのトロイダル回転シアによる安定化メカニズムについて理論・数値的研究を行っている

トロイダル回転なし

$$\bar{\rho}\frac{\partial^2\xi_\perp}{\partial t^2} = \mathcal{L}(\tfrac{\partial}{\partial\vartheta},\vartheta)\xi_\perp$$

$$\mathcal{L}\xi_\perp := \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(f\frac{\partial\xi_\perp}{\partial\vartheta}\right) - g\xi_\perp$$

$$\bar{\rho} := \frac{\mu_0\rho|\mathbf{k}|^2\sqrt{g}}{B^2} \qquad f := \frac{|\mathbf{k}|^2}{B^2\sqrt{g}}$$

$$g := -\frac{2\mu_0}{B^4}(\mathbf{B}\times\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\kappa})(\mathbf{B}\times\mathbf{k}\cdot\nabla p)$$

$\vartheta \in (-\infty,\infty)$;磁力線方向座標

$$\mathbf{k} := \nabla\zeta - q\nabla\theta - (\vartheta - \theta_k)\nabla q$$

通常、時間についてフーリエ変換し、

$$-\bar{\rho}\omega^2\xi_\perp = \mathcal{L}\xi_\perp$$

を固有値問題として解く

（ $\mathcal{L}$ のスペクトル解析）

トロイダル回転あり

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial^2\xi_\perp}{\partial t^2} - U\frac{\partial\xi_\perp}{\partial t}\right) = \mathcal{L}(\tfrac{\partial}{\partial\vartheta},\vartheta,t)\xi_\perp$$

$$U := \frac{2\mathbf{k}\cdot\nabla\Omega}{|\mathbf{k}|^2}$$

$$\dot{\Omega} := \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}q}$$

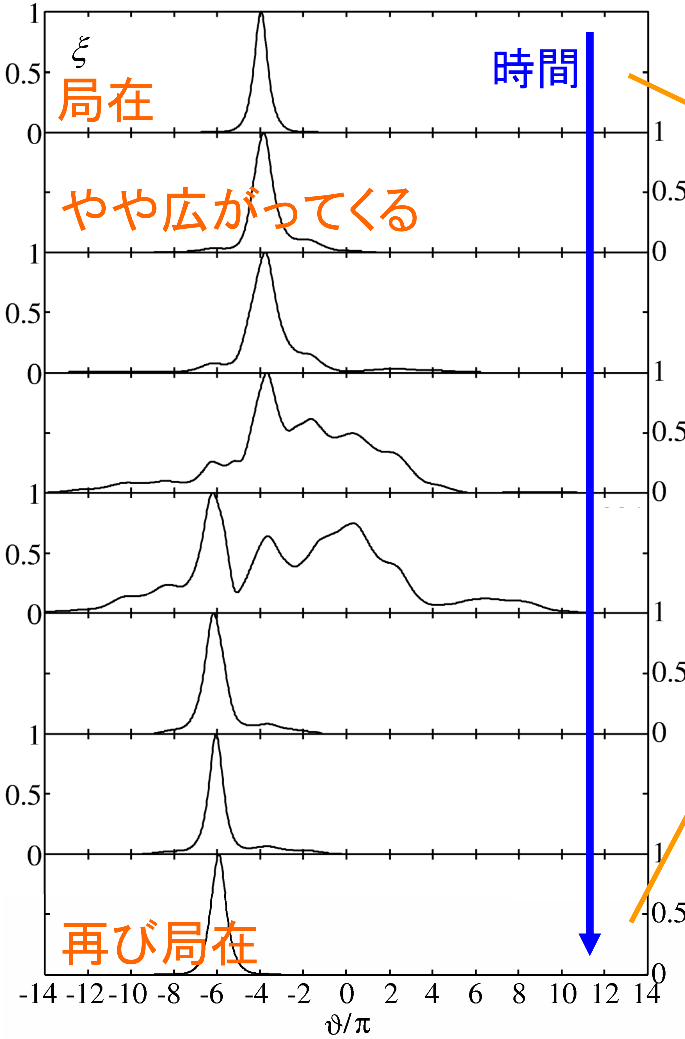
$$\mathbf{k} := \nabla\zeta - q\nabla\theta - (\vartheta - \theta_k + \dot{\Omega}t)\nabla q$$

波数ベクトルを通じて、時間について非斉次になっている

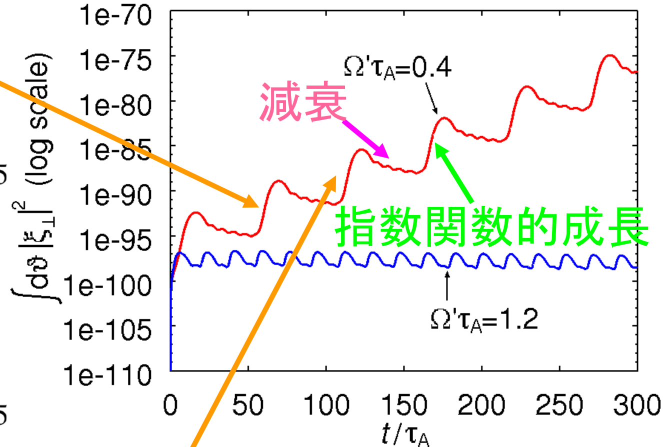
初期値問題として解く

研究背景（II）

解の時間発展



摂動ノルムの時間発展



周期 $2\pi/\Omega'$ をもった時間発展

Ω'を大きくすることで、ノルムが時間平均的に増大しなくなる（安定化）

成長フェーズのモード構造及び成長率と、トロイダル回転がないときの固有値問題　$-\bar{\rho}\omega^2\xi_\perp = \mathcal{L}\xi_\perp$　のそれとはよく対応している

各瞬間（波数ベクトルが時間変化するので）、トロイダル回転がないときの固有値問題によって固有関数系を定義し、回転があるときの $\xi_\perp$ を展開すればよいだろう

研究目的

簡単な例

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mathcal{L}_m y \quad \left(\mathcal{L}_m := \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

$\mathcal{L}_m$ の固有関数は、

$$\mathcal{L}_m y = -\omega^2 y$$

から

$$y_j(x) = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\,\omega x}$$

これを使って y を展開

$$y(x,t) = \sum_j a_j^{\pm}(t) \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\,\omega x}$$

展開係数の発展方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_j^{\pm}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 a_j^{\pm}$$

を得る

各“モード”は独立な振動子

バルーニング方程式

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial^2 \xi_\perp}{\partial t^2} - U \frac{\partial \xi_\perp}{\partial t} \right) = \mathcal{L}\xi_\perp$$

$\mathcal{L}$ の固有関数は、

$$\mathcal{L}(\vartheta;t)\xi(\vartheta;t) = -\omega^2(t)\bar{\rho}(\vartheta;t)\xi$$

を一般的には数値計算で求める

これを使って $\xi_\perp$ を展開

$$\xi_\perp(\vartheta,t) = \sum_j a_j(t)\xi_j(\vartheta,t)$$

展開係数の発展方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_j}{\mathrm{d}t^2} + \sum_k C_{1jk}\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} + \sum_k C_{2jk}a_k = -\sum_k \omega_k^2 C_{3jk} a_k$$

$$\left(\begin{aligned} C_{1jk} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vartheta w \xi_j^* \left(2\frac{\partial \xi_k}{\partial t} - U\xi_k \right) \\ C_{2jk} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vartheta w \xi_j^* \left(2\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2} - U\frac{\partial \xi_k}{\partial t} \right) \\ C_{3jk} &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vartheta h w \xi_j^* \xi_k \end{aligned} \right)$$

“モード”間結合が起こる

バルーニング方程式の場合、安定側に連続スペクトルがあり、その一般化固有関数は自乗可積分ではない

一般化固有関数を正則な直交関数で“上手に(見たい現象が見える範囲内で)”近似する方法を見出し、その適用範囲を議論する

遠方での漸近解と重み関数の変更

方針

$$\mathcal{L}(\vartheta;t)\xi(\vartheta;t) = -\omega^2(t)\bar{\rho}(\vartheta;t)\xi$$

重み関数を変えた固有値問題を導入

$$\mathcal{L}(\vartheta;t)\xi(\vartheta;t) = -\lambda(t)\bar{\rho}(\vartheta,t)h(\vartheta)\xi$$

h をうまく選んで、点スペクトルしか生じないようにしたい

$\mathcal{L}$ を使って直交関数系を構成することにより、少数モード数による展開が可能になることを期待

$\lambda > 0$ のときに自乗可積分な解 ξ が得られるかどうかは、遠方での ξ の振舞に依るので、

（1） まず $x = 1/\vartheta$ と変数変換し、

（2） さらに $\varphi \equiv \sqrt{x^2 f}\xi$ としてSchrödinger型に変換

$$-\frac{x^4 f}{\bar{\rho}h}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{x^2}{\bar{\rho}h}\left[\sqrt{x^2 f}\frac{\mathrm{d}^2\sqrt{x^2 f}}{\mathrm{d}x^2} + \frac{g}{x^2}\right]\varphi = \lambda\varphi$$

このとき、

$$h = (f/\bar{\rho})x^4 = (f/\bar{\rho})\vartheta^{-4}$$

と選べば、ポテンシャルが $x = 0$ で発散する

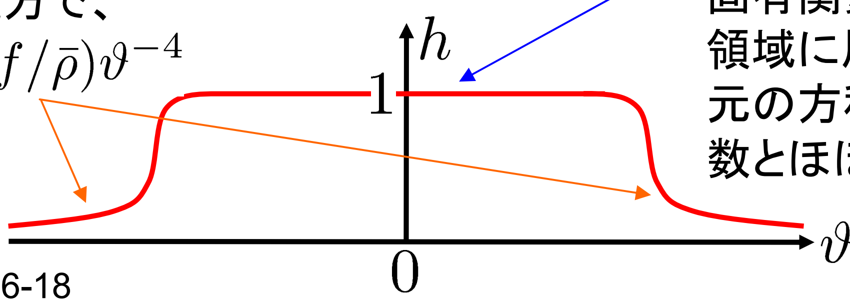
$f/\bar{\rho}$ から ϑ の永年項は出ない

$$\bar{\rho} := \frac{\mu_0\rho|\mathbf{k}|^2\sqrt{g}}{B^2} \quad f := \frac{|\mathbf{k}|^2}{B^2\sqrt{g}}$$

$x = 0$ （つまり $|\vartheta| \to \infty$ ）での無限に高いポテンシャル障壁により、ξ は0になるように抑えられ、自乗可積分な解が得られる

十分遠方で、

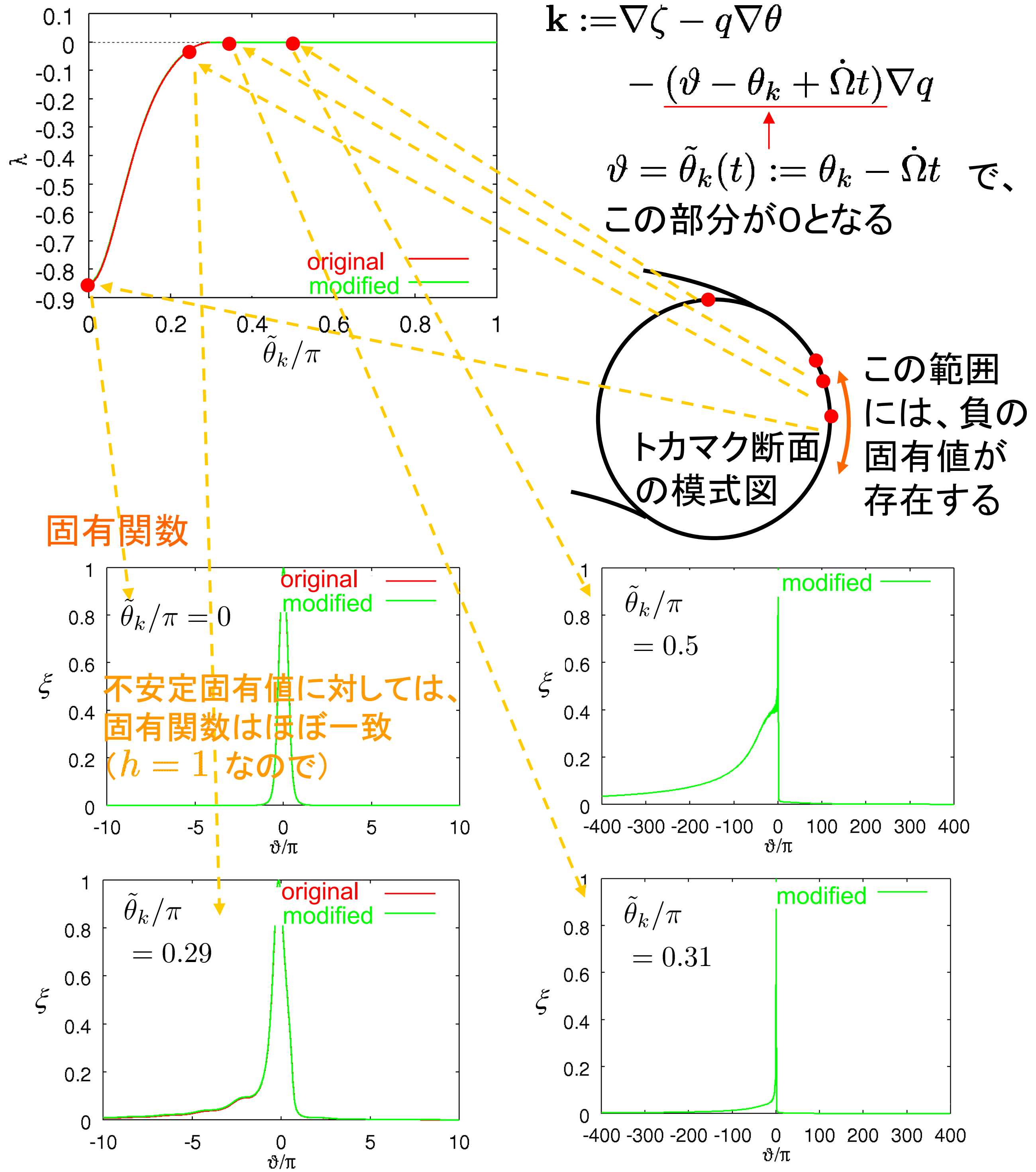
$h \propto (f/\bar{\rho})\vartheta^{-4}$



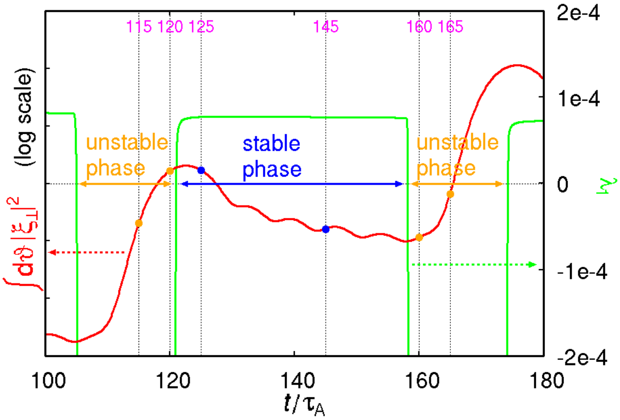
不安定固有値に対する固有関数は $h = 1$ の領域に局在するので、元の方程式の固有関数とほぼ同じ

固有値・固有関数の例

固有値



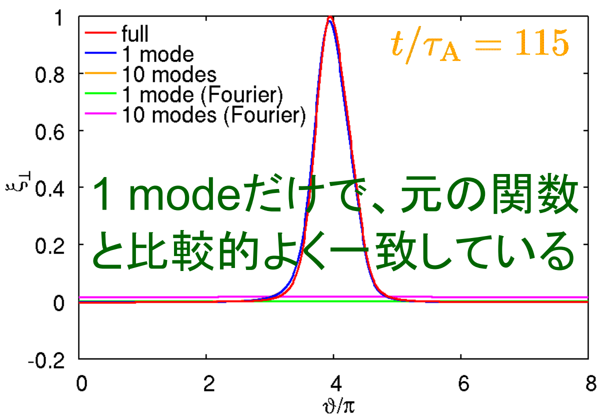
モード数による再構成$\xi_\perp$の違い

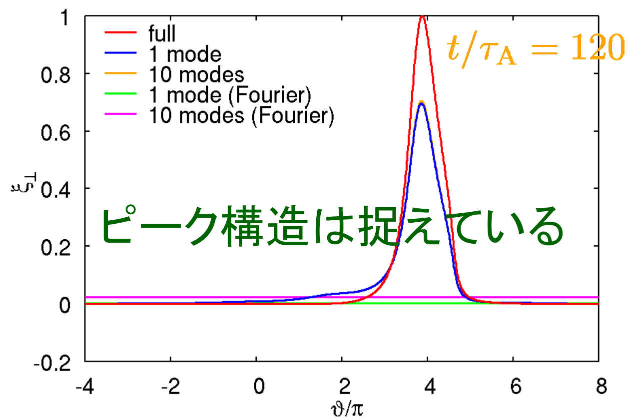


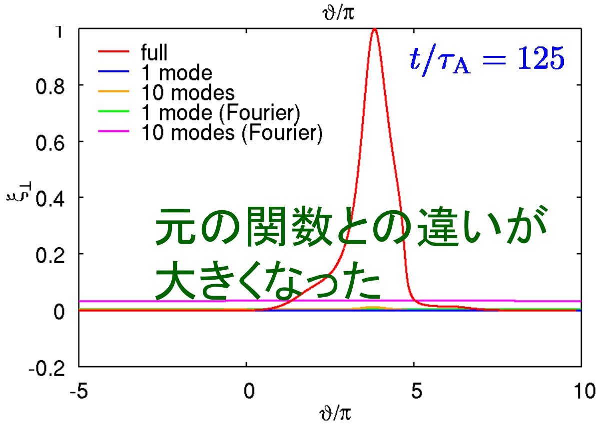
full　　　: 元の$\xi_\perp$

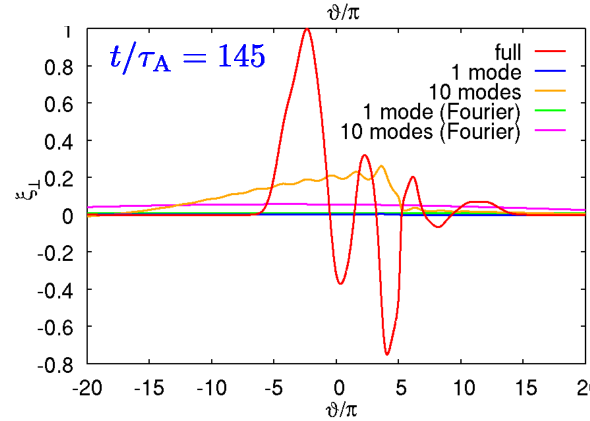
N modes : $\displaystyle\sum_{j=1}^{N} a_j(t)\xi_j(\vartheta,t)$

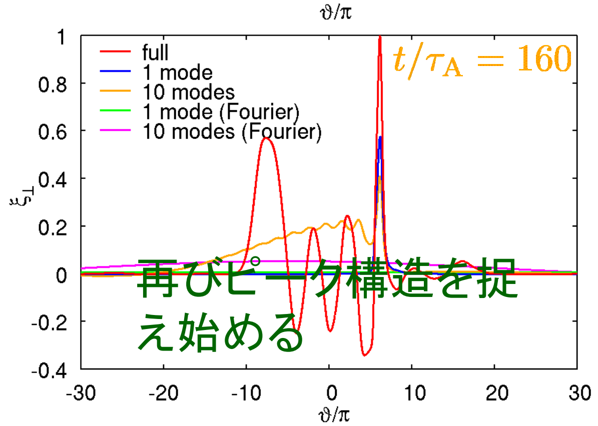
Fourier : $\displaystyle\sum_{j=-N}^{N} c_j(t)e^{i k_j \vartheta}$

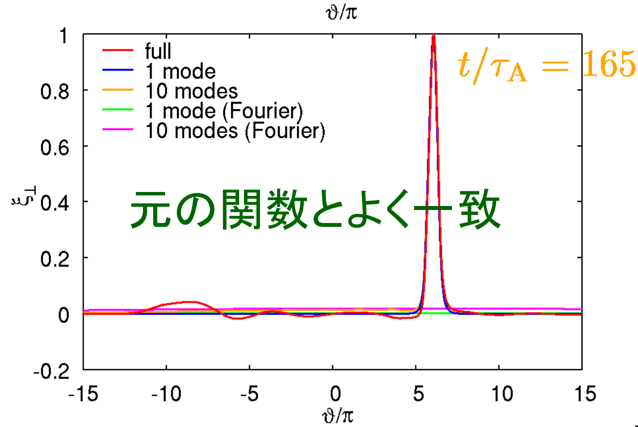




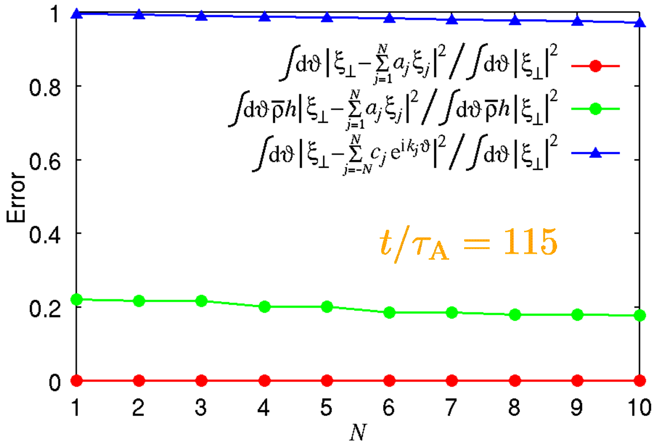


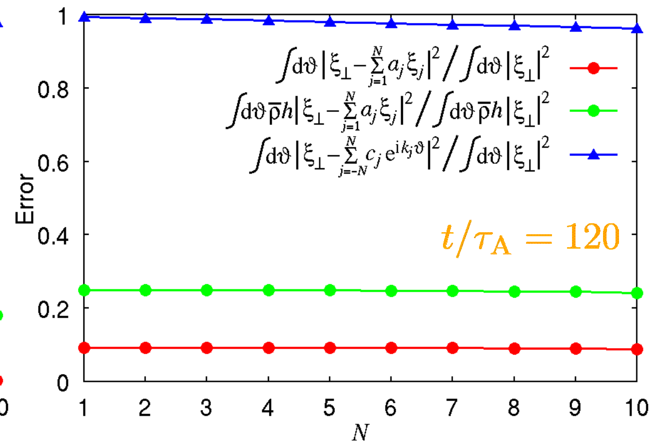


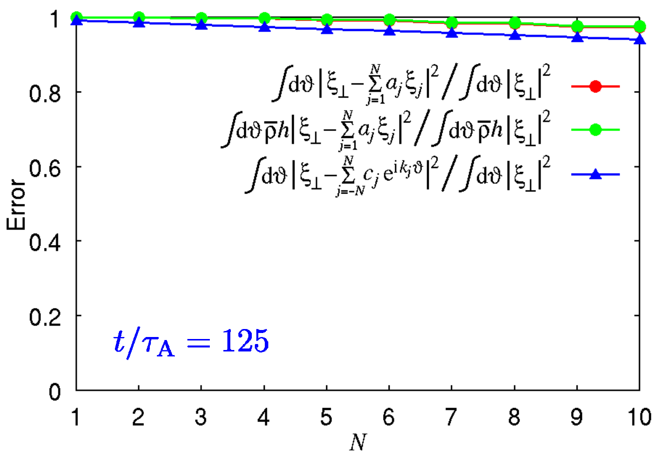


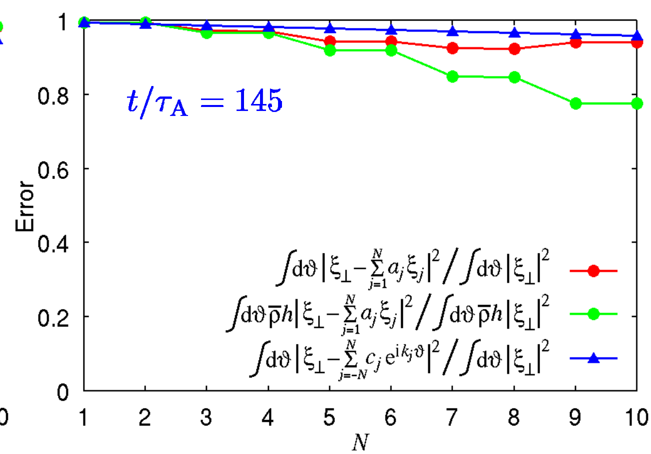


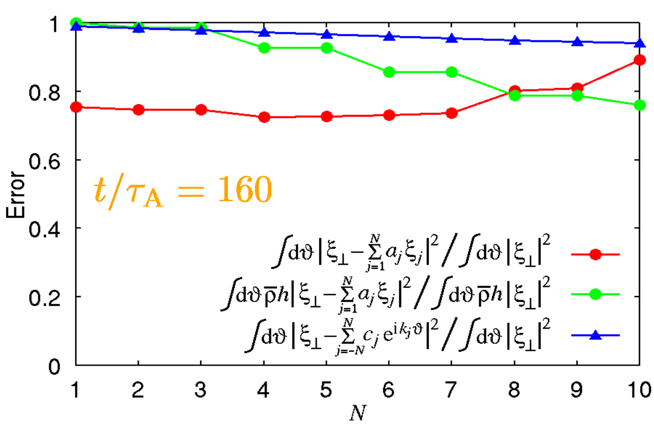
モード数と誤差

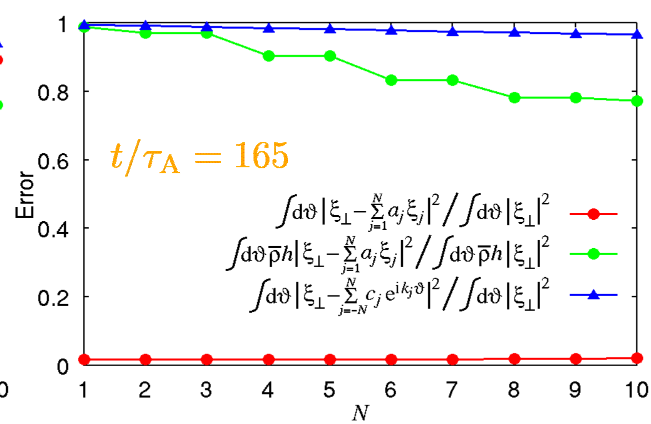












- 多くの時刻において、フーリエ級数展開よりも効率が良いことがわかる

結論

- トロイダル回転トカマクにおける高nバルーニングモード方程式の、初期値問題としての解をモード展開する際に有効な直交関数系を見出し、その適用範囲を議論した

具体的方策と原理

- 回転がないときのバルーニング方程式の遠方での重み関数を、Schrödinger型に書いたときに無限に高いポテンシャル障壁が出来るように変更する;

  元々安定側にあった連続スペクトルに属する一般化（特異）固有関数を抑えることが出来るので、点スペクトルのみを生じ、また固有関数は正則となる

適用範囲

- 不安定固有値が存在するときは、その固有関数が局在化し、かつ主要であるので、遠方での重み関数の変更は関数の再構成にほとんど影響せず、少数モードだけで元の関数を良く再現する

- 安定固有値（伝播する波）しかない場合には、遠方で重み関数を変更することによって得た定在波で展開しても、長時間の後には少数モードだけでは元の関数を再構成できなくなる