

# Numerical analysis of ideal MHD stability of tokamak edge plasma with Newcomb equation

相羽信行、徳田伸二<sup>1)</sup>、石澤朋子<sup>2)</sup>、岡本正雄<sup>3)</sup>

総研大物理、1) 原研那珂・CCSE、2) RIST、3) NIFS

第8回若手研究会

平成17年3月16－18日

## 概要

- イントロダクション
- 理論的背景および技法
- 真空磁場エネルギーの数値計算法
- 高 $n$ 外部MHDモードの安定性解析例

# イントロダクション

トカマクプラズマによる発電炉の実現

→ 高性能(高 $\beta$ ・高閉じ込め)プラズマを  
長時間維持することが不可欠

高 $\beta$ 化によりMHD不安定性が現れる可能性

特にプラズマ表面が変位する外部MHDモードとして

✓ 抵抗性壁モード (多くの場合プラズマ全体が変位)

✓ ピーリング・バルーニングモード

(プラズマ表面近傍に局在した変位)

の不安定化が懸念されている。

これらの外部MHDモードの安定性解析を行う  
理論・解析モデルおよび数値コードの開発が急務。

# 理論的背景：理想MHDエネルギー原理

$$\delta K + \delta W = 0; \quad \delta W = \delta W_p + \delta W_v$$

$V_p$ : プラズマの体積

$V_v$ : 真空磁場領域の体積

$$\delta W_p = \int_{V_p} L d\tau, \quad \delta W_v = (1/2) \int_{V_v} \mathbf{B}^2 d\tau$$

$$L = a |D_\theta(Y)|^2 + b |inV| + \frac{1}{q_s} \frac{\partial Y}{\partial \psi} + \beta_{\psi\theta} D_\theta(Y) + h |Y|^2$$

$$+ c \left| \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right|^2 + e |Y|^2, \quad a, b, h, e \text{ は } (\psi, \theta) \text{ の関数、} c \text{ は } \psi \text{ の関数}$$

$$Y := \vec{\xi} \cdot \nabla r,$$

$$D_\theta(Y) := \left( \frac{1}{q} \partial_\theta - in \right) Y \quad \beta_{\psi\theta} = q \frac{|\nabla \psi \times \nabla \theta|}{|\nabla \psi|^2}$$

$$V := r \left( \vec{\xi} \cdot \nabla \theta - \frac{1}{q} \vec{\xi} \cdot \nabla \phi \right)$$

$\delta W < 0$  となるような変位 (自乗可積分)  $\xi$  が存在すれば、そのMHD平衡は理想MHD的な摂動に対して不安定である。

理想MHD的に安定な条件:

$$\delta W > 0 \quad \text{for } \forall \vec{\xi} \in \{ \vec{\xi} \mid \text{square integrable} \}$$

➡ 固有値問題を作って解く

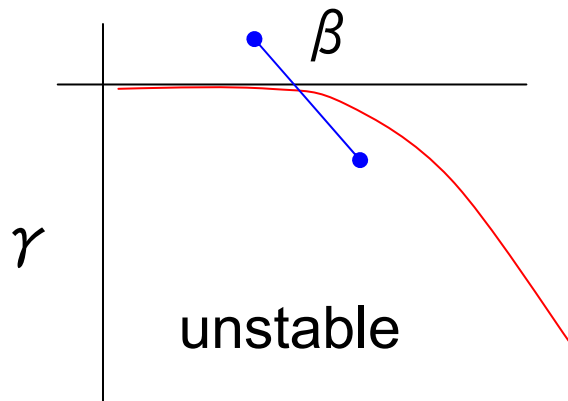
# 従来のMHD線形安定性解析

従来のMHDスペクトルコード(ERATO(J) etc.)

Kinetic Energy integral :  $\delta K = \int_p \rho |\vec{\xi}|^2 d\tau \quad \rho > 0$

制約条件  $\delta K = 1$  のもとで、ベクトル変数  $\xi$  について  $\delta W$  を最小化。  
物理に忠実な計算(成長率が計算できる)であるが、一般にプラズマが不安定であることしか数値的に示すことができない。(図中赤線)  
(shear Alfvén spectrum(連続スペクトル)の影響)

→  **$\beta$  限界を調べるには不利**



プラズマが安定であることも数値的に示すことができれば、 $\beta$  限界の同定が容易。  
また、安定→不安定へのプラズマの変化を時系列で調べることができる。

→ **新たな物理モデルの構築**

# Newcomb方程式の随伴固有値問題を解く解析モデル

連続スペクトルの現れない随伴固有値問題<sup>[1]</sup>

$$\mathbf{N}\xi = -\lambda\mathbf{R}\xi$$

$\mathbf{R}$  : 対角行列

$r_s$  : 有理面における $r$ 座標

$$R_{m,m} \propto \begin{cases} \left(n - \frac{m}{q}\right)^2, & 0 < r_s < a, \\ \text{const.}, & \text{no rational surface} \end{cases}$$

$\mathbf{N}$ はNewcomb演算子

( $\mathbf{N}\xi=0$ は慣性項を消去した線形理想MHD運動方程式)。

この固有値問題のスペクトルは離散固有値のみで構成されているため数値的に解くことが容易であり、理想MHD摂動に対して

$\lambda > 0$  , プラズマは安定

$\lambda < 0$  , プラズマは不安定

であることがいえる。 → **MARG2Dコードの開発**

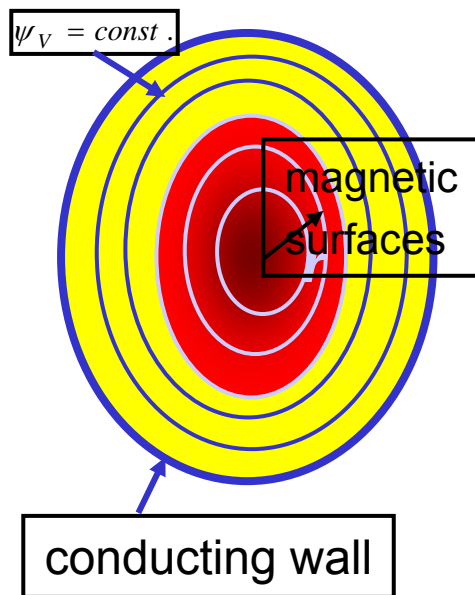
[1] S. Tokuda et. al., Phys. Plasmas **6**, 3012 (1999)

# ベクトルポテンシャル法による 真空磁場エネルギーの計算

外部モードの安定性解析に真空磁場エネルギー $\delta W_V$ の計算は必須

MARG2Dにおける $\delta W_V$ の計算方法は2種類

1. Green関数法<sup>[2]</sup> (導体壁の位置・形状をかなり自由に選べる)
2. **Vector potential法<sup>[3]</sup>**  
(トロイダルモード数 $n$ の高い外部モードの解析が可能)



## Vector potential法

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \vec{\xi}_V \times \mathbf{C}_V,$$

$$\mathbf{C}_V = \nabla \phi \times \nabla \psi_V + T_V \nabla \phi$$

上のようなVector potentialを用意することで $\delta W_V$ をプラズマのポテンシャルエネルギー $\delta W_p$ と同様の定式化を行うことで、 $n$ の(数値的な)上限をなくす。

[2] F. Troyon et al. Comput. Phys. Commun. **19** 161 (1980)

[3] R. Gruber et al., Comput. Phys. Commun. **24** 363 (1981)

# ベンチマークテストのための平衡

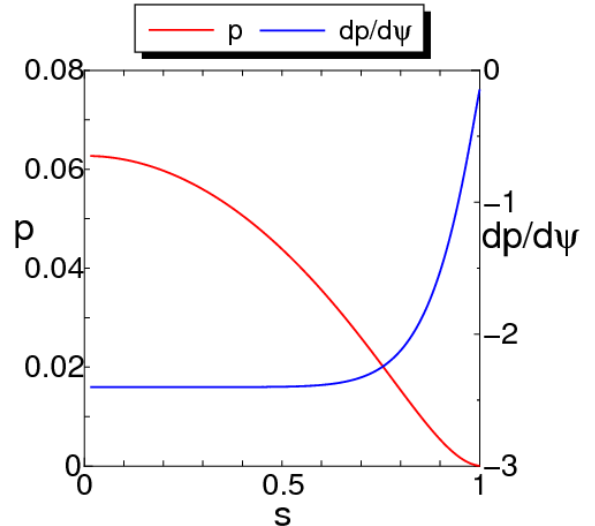
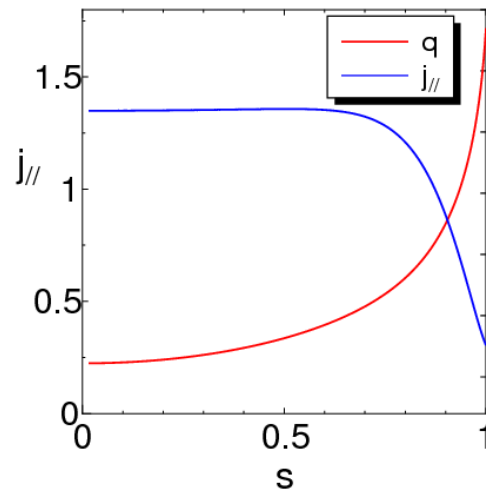
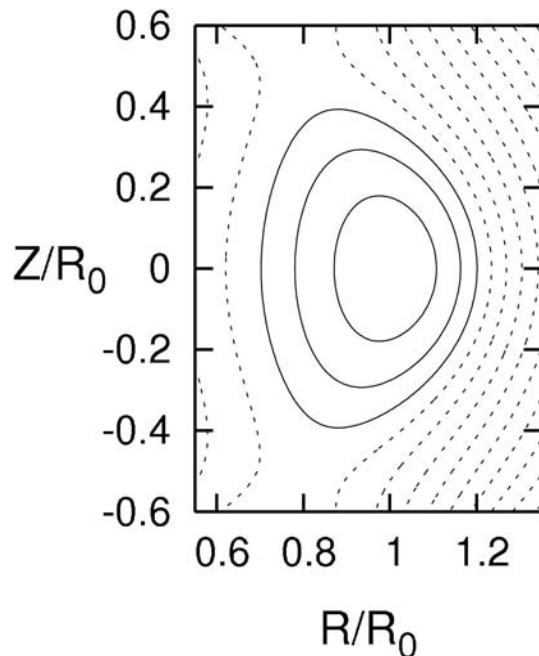
以下の平衡における $n=5$ の安定性解析

⇔ ERATOJと比較することによるベンチマーク

$$A = 3.26, \quad \kappa = 1.8, \quad \delta = 0.45, \quad q_a = 4.35, \quad j_{//} / \langle j \rangle = 0.18$$

$j_{//}$  : 表面電流密度

$\langle j \rangle$  : 全電流量とポロイダル断面積から求まる平均電流密度



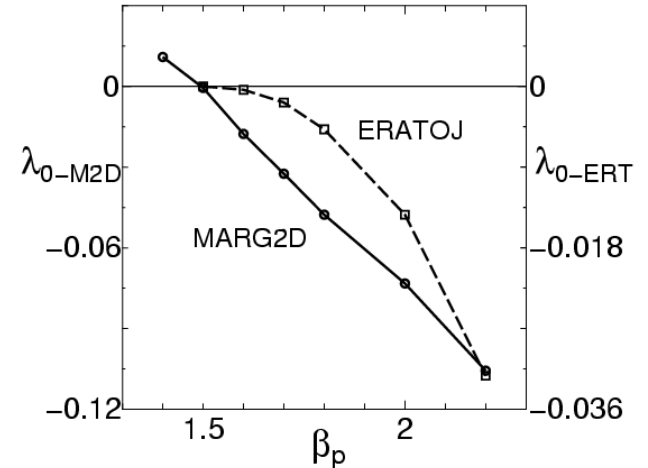
# ベンチマーク結果 (n=5)

n=5の外部モードは $\beta_p=1.5$ で臨界安定となることを示している。

その際の固有関数もMARG2D、ERATOJいずれもほぼ同じ構造をしている。

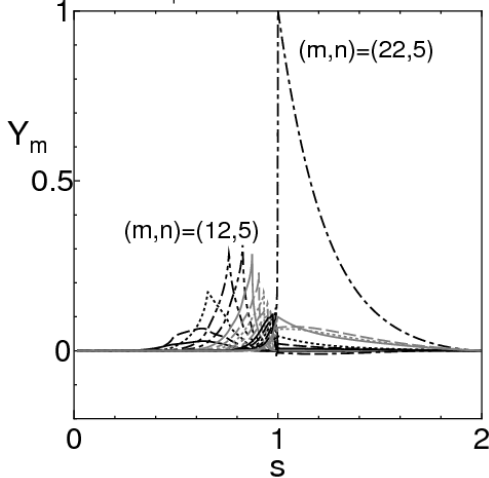
b/a is fixed as 1.25.

n=5,  $q_a=4.350$ , b/a=1.25, JEQ=10



ERATOJ

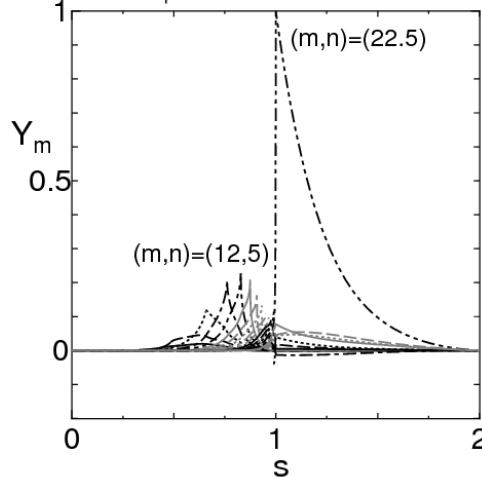
n=5,  $q_a=4.35$ , b/a=1.25,  
 $\beta_p=1.5$ ,  $\lambda_{0-ERT}=-8.83e^{-6}$



Comp. time 178s

MARG2D

n=5,  $q_a=4.35$ , b/a=1.25,  
 $\beta_p=1.5$ ,  $\lambda_{0-M2D}=-5.55e^{-4}$



9000s

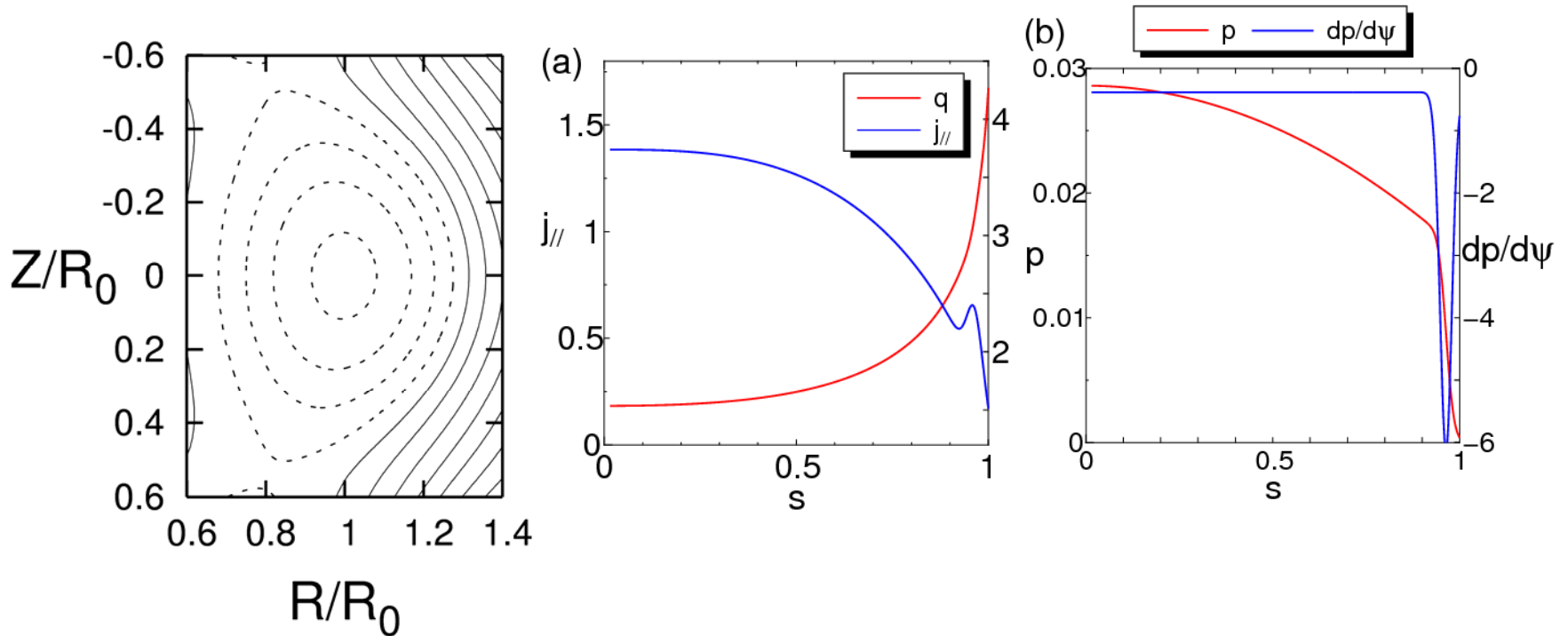
固有関数より(m,n)=(22,5)の外部モード(キンクモード)が強く表れた構造であることがわかる。

MARG2D is about 50 times faster than ERATOJ



# peeling-ballooning modeの計算例(平衡)

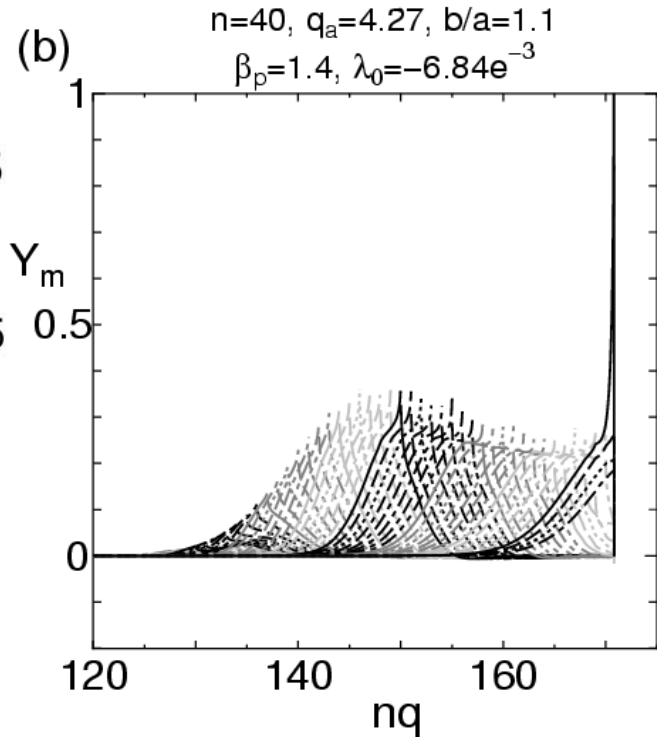
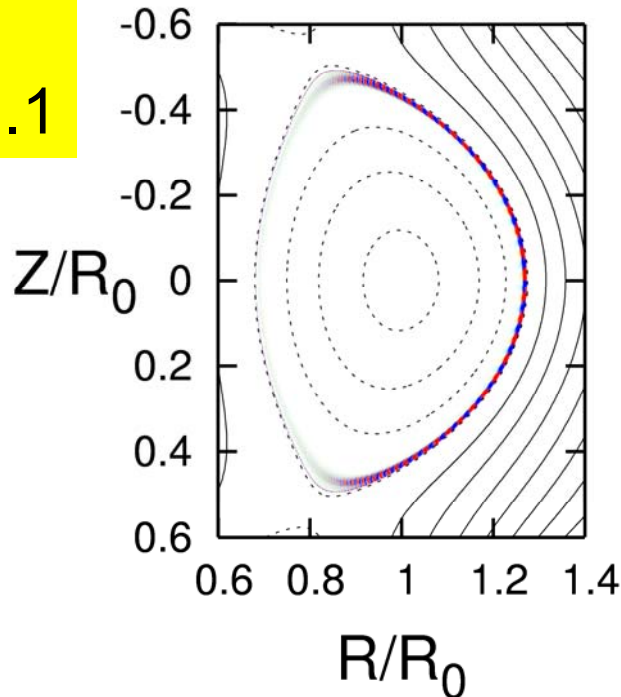
$$A = 3.26, \quad \kappa = 1.8, \quad \delta = 0.45, \quad \beta_p = 1.4, \quad q_a = 4.27, \quad j_{//} / \langle j \rangle = 0.14$$



プラズマ表面近傍に急峻な圧力勾配をもつ平衡  
ベンチマークと同様、プラズマ表面に電流が流れている。  
(peeling-ballooning modeが起こりやすい)

# Peeling-ballooningモードの計算例

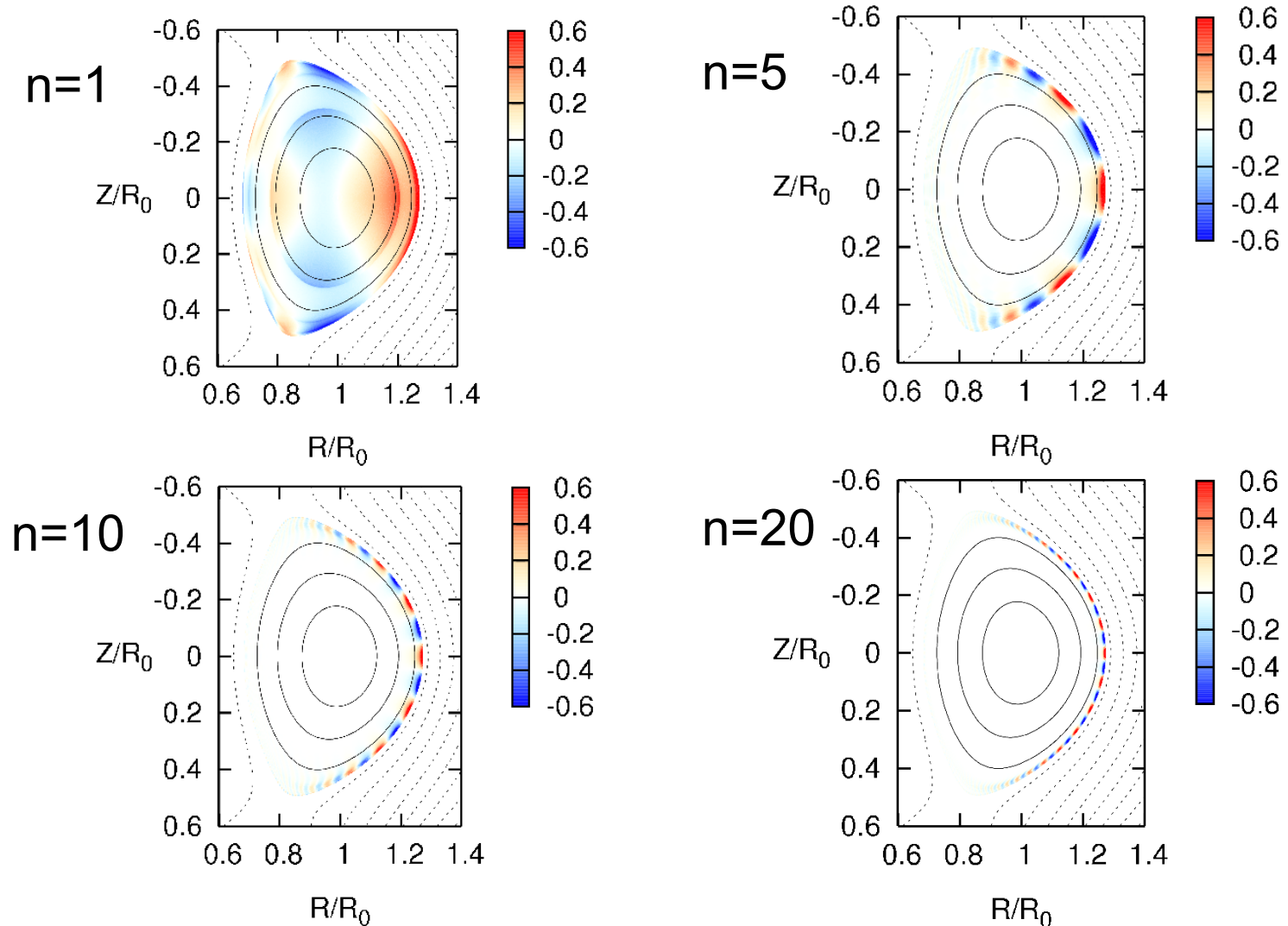
$n=40$   
 $b/a = 1.1$



プラズマ表面にピークした $(m,n)=(171,40)$ のpeelingモードと、 $nq=150$ 近傍を極大とした包絡線に抑えられたedge ballooningモードの合わさった構造が現れているのがわかる。

# 様々なnにおける固有関数の構造

これまで開発してきた解析モデル・数値コードを用いることで  
広いnの範囲における外部MHDモードの安定性解析を実現



# $\beta$ 限界に対するアスペクト比の影響について (L-mode)

アスペクト比が2.44, 3.26, 4.0の3種類の平衡における理想外部モードの安定性を解析。

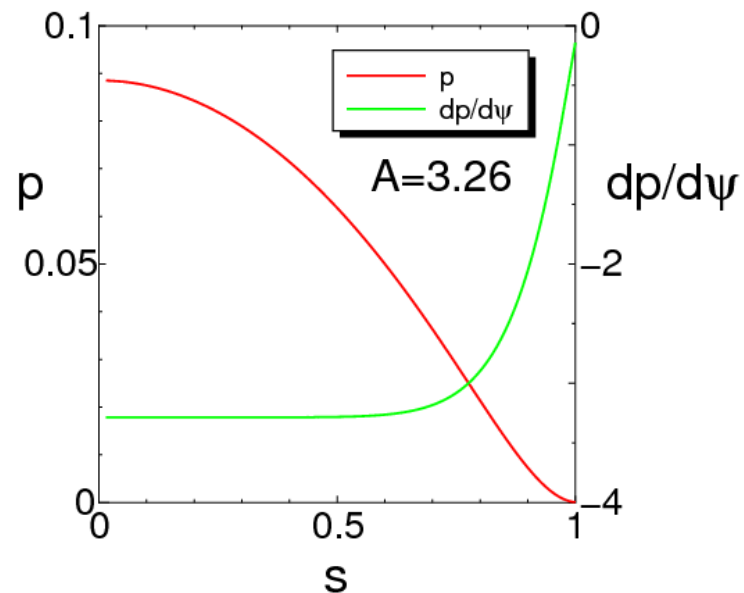
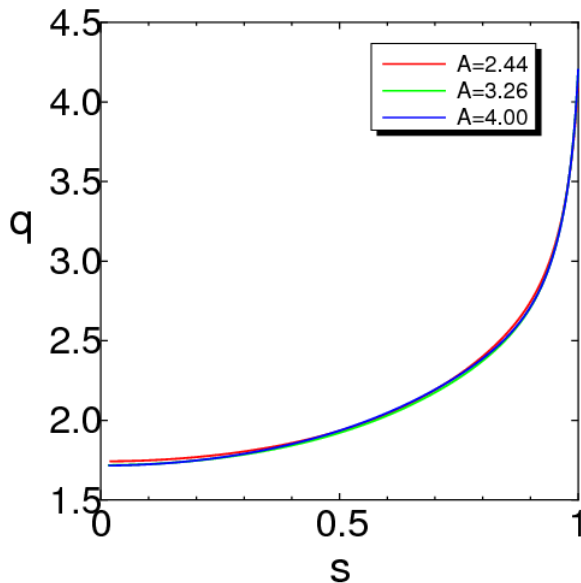
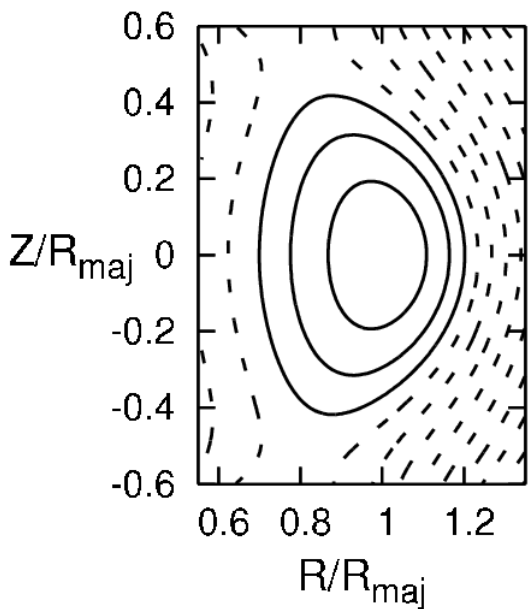
固定パラメータ  $\kappa \approx 1.8$  ( $\kappa_{95} \approx 1.7$ )

$\delta \approx 0.45$ ,  $q_{95} \approx 3.55$

$\beta_N=5.0$ の場合の平衡のプロファイル

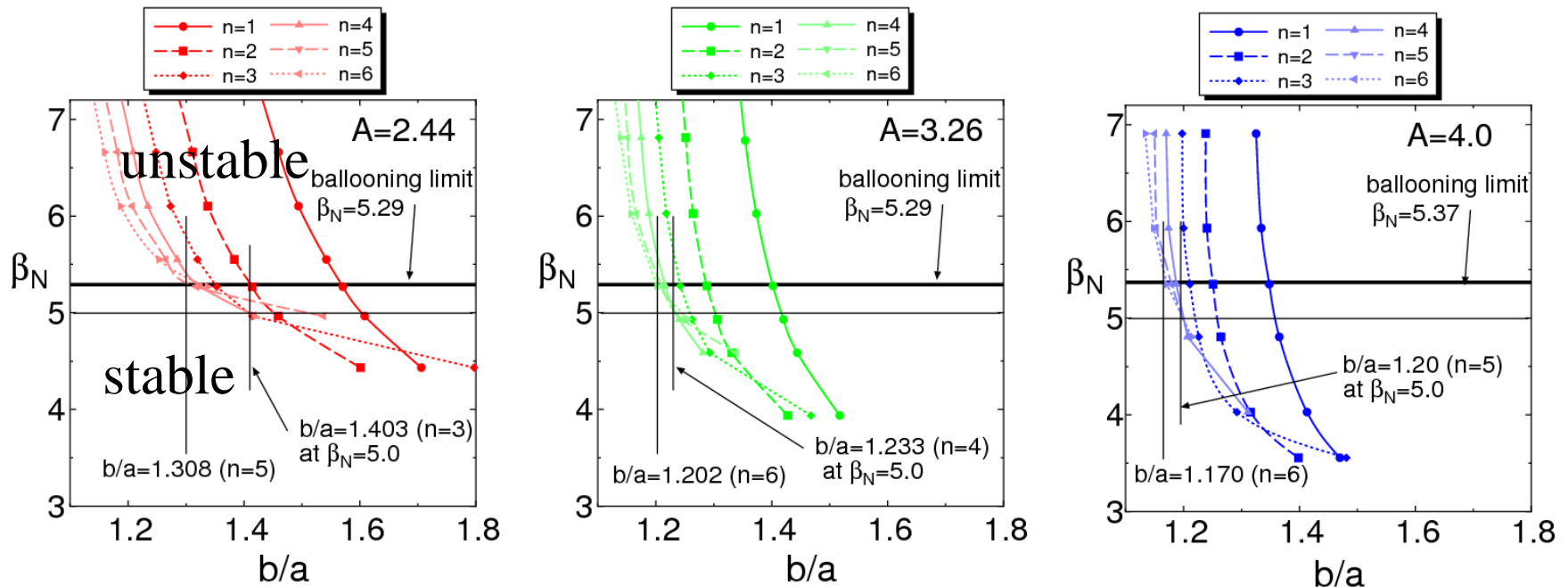
安全係数( $q$ )分布

圧力( $p$ ,赤)および $dp/d\psi$ (緑)



# $\beta$ 限界のアスペクト比依存性

## (正磁気シア平衡)



- アスペクト比の違いは $\beta_N=6.5$ 以下から現れ、また $\beta_N$ が下がるにつれてその影響は大きくなる。
- 例えば $\beta_N=5.0$ を達成するには $A=2.44$ では $b/a=1.4$ 、 $3.26$ では $b/a=1.233$ 、 $4.0$ では $b/a=1.20$ 以下まで近づける必要がある。
- また $b/a=1.4$ の条件で、 $A=2.44$ では $\beta_N=5.0$ 、 $3.26$ では $\beta_N=4.0$ 、 $4.0$ では $\beta_N=3.5$ がそれぞれ $\beta$ 限界となる



# Computing the perturbed field energy in the vacuum with the Green's function

Stability of the external mode is clarified by the sign of  $\delta W_p + \delta W_V$ .

Quadratic form for Ideal external kink modes

$$\delta W_p + \delta W_V - \omega^2 \delta K = 0$$

$$\delta W_V = (1/2) \int_V \mathbf{B}^2 d\tau \quad (*1)$$

Green's function method:

$\delta W_V$  is expressed by a quadratic form with respect the surface values of the displacement by using the Green's function for the scalar potential function  $\Phi$  ( $\mathbf{B} = \text{grad } \Phi$ )

$$\delta W_V = \langle \mathbf{x} | \mathbf{M}_V | \mathbf{x} \rangle, \quad \mathbf{x} := (\cdots, x_l, \cdots)^t$$

The method deals flexibly with the shape of the conducting wall.

# Newcomb方程式に基づいた 理想MHD安定性の同定

理想MHD運動方程式から慣性項を消去

→ **Newcomb equation<sup>[1]</sup> :  $N\xi = 0$**

$N$ : Newcomb演算子、 $\xi$ : プラズマ変位

この方程式はプラズマが臨界安定である際に満たされる。

この方程式の随伴固有値問題  $N\xi = -\lambda\rho\xi$

を解くことができれば、その固有値の正負から理想MHD  
摂動に対するプラズマの安定性が同定できる。

しかし  $\updownarrow$

連続スペクトルの存在により、有理面の存在するMHD平  
衡において、プラズマが安定であることを数値的に示すこと  
は困難。 => **新たな解析モデルの構築が必須**

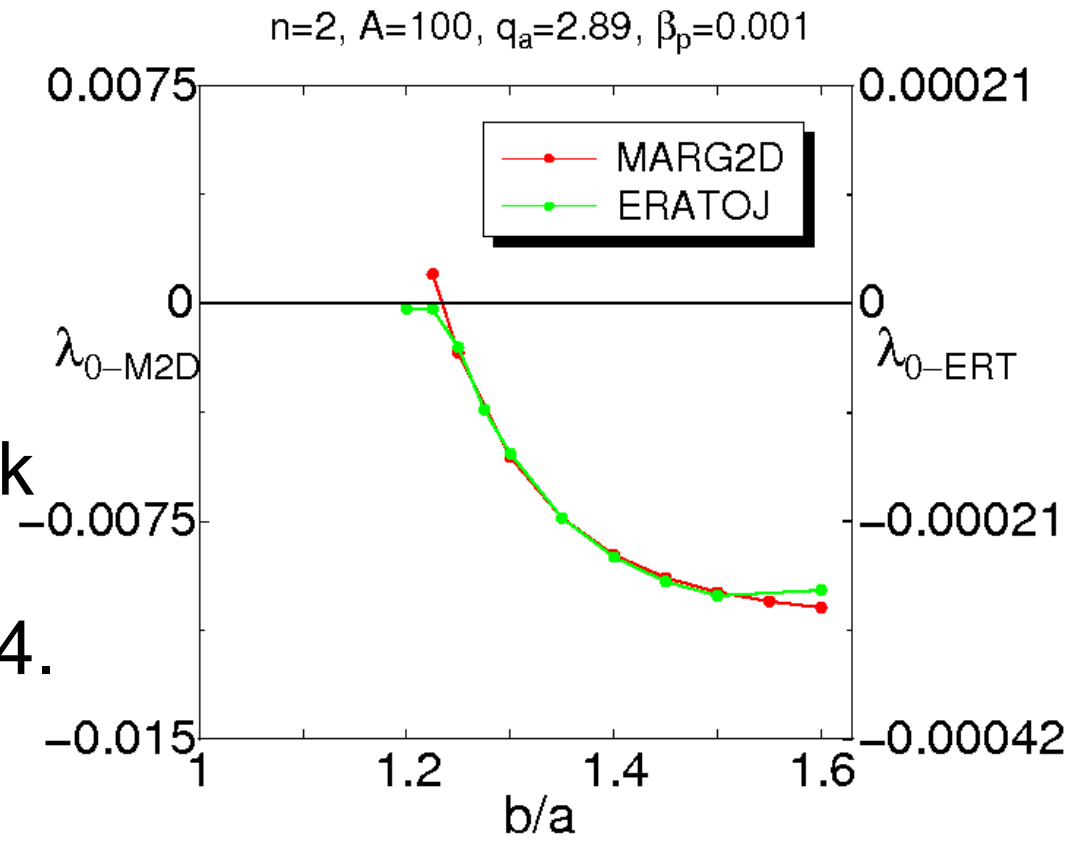
[1] W. A. Newcomb, Ann. Phys. **10**, 232 (1960)



# Benchmark tests between the extended MARG2D with ERATOJ for the $n = 2$ external kink mode

$A = 100, \beta_J = 0.001,$   
 $q_a = 2.89$

Each result shows that  $n=2$  external kink mode is marginally stable when  $b/a=1.24$ .



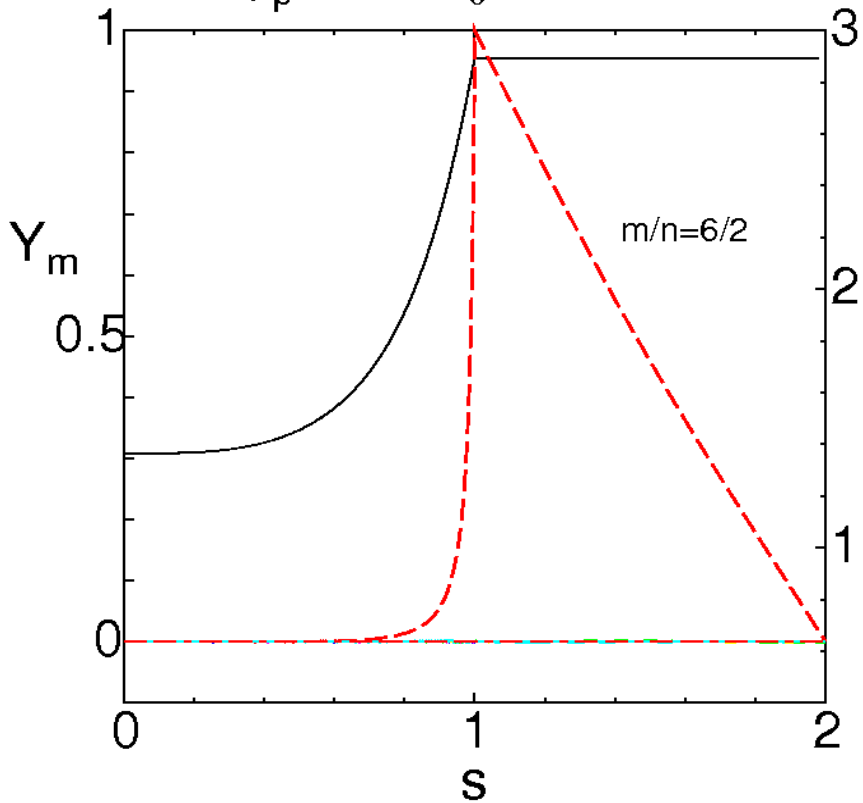
● MARG2D

● ERATOJ

# Comparison of eigenfunctions by the two codes

$A=100, q_a=2.89, b/a=1.25$

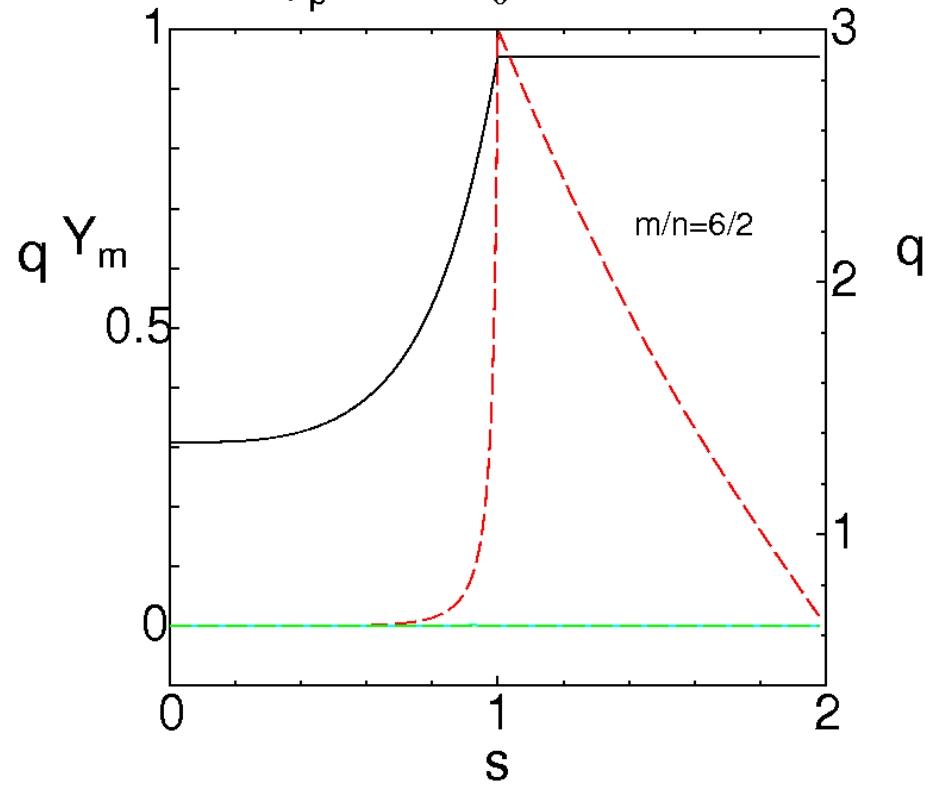
$\beta_p=0.001, \lambda_0=-1.692e^{-3}$



MARG2D

$A=100, q_a=2.89, b/a=1.25$

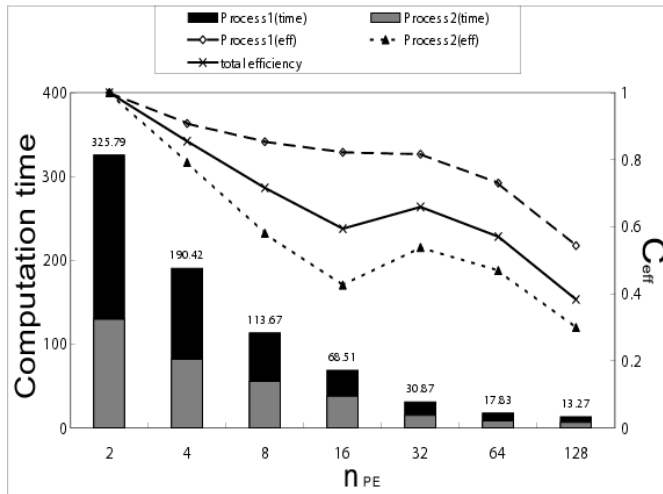
$\beta_p=0.001, \lambda_0=-1.452e^{-4}$



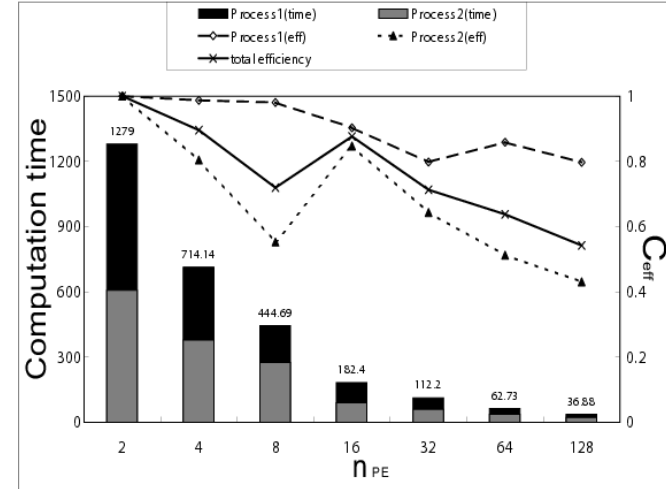
ERATOJ

# Parallelization of MARG2D

(a)  $n=1$ , NPSI=800, NV=80, MM2D=64,  $M_{peak}=0$



(b)  $n=30$ , NPSI=2400, NV=240, MM2D=72,  $M_{peak}=100$



$$C_{eff}(n_{pe}) = \frac{(\text{Computation time when } n_{pe} = 2) \times 2}{(\text{Computation time with } n_{pe}) \times n_{pe}}$$

The computation system, JAERI Origin3800, has the peak computing speed when  $n_{pe}=128$  as 128GFlops.

These results show that the parallelized MARG2D code has potential for realizing the analysis in the intervals of experiments.

ELMs analysis, especially the relation between the stability and the transport, will be executed with MARG2D and the transport code.