Grad-Shafranov 方程式に対する Hyper-Singular 境界積分方程式の定式化

Hyper-singular BIE formulation for the Grad-Shafranov equation

北海道大学大学院工学研究科 プラズマ数理工学研究室 下田 啓詞

Hyper-Singular 境界積分方程式

Hyper-Singular 境界積分方程式(HBIE)は、偏微分方程式の境界値問題に対応する従来の境界積分方程式(SBIE)を特異点位置でもう 1 回微分することで得られ、従来の境界積分方程式と連立させることで、一般に固有値解析や逆解析における解のロバスト性を高め得る。この方程式は基本解の 2 階微分を含むので所謂「強い特異性」よりさらに強い “hyper singularity”を呈し、具体的な定式化には個々の工学問題に応じて十分な工夫を要する。本研究では、軸対称トカマクプラズマの支配方程式である Grad-Shafranov 方程式に対する Hyper-Singular 境界積分方程式を、「弱い特異性」のレベルにまで減じた定式化に成功した。

Hyper-Singular 境界積分方程式の定式化

板垣らは、Grad-Shafranov 方程式中の電流密度に関わる非斉次項を多項式展開することにより、プラズマ内部の点iに対して境界積分方程式

$$\psi_i - \int_\Gamma \left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ \varphi_i^{(l,m)} - \int_\Gamma \left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial \varphi^{(l,m)}}{\partial n} - \frac{\varphi^{(l,m)}}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right\} \qquad (1)$$

が成り立つことを示した。ここに、ψ^*は基本解(Green 関数)、$\varphi^{(l,\,m)}$は単項式$r^l z^m$をソース項とする Grad-Shafranov 方程式の特解である。

今、式(1)を境界上の点iに拡張するため、特異点である点iを中心とした半径εの扇形に膨らませた小さな境界Γ_εを作り、$\varepsilon \to 0$の極限操作を行う。この時、式(1)を点iにおいて任意の方向mで微分する。以下、点iの位置をξ、境界上の積分点をxと表す。ξの近傍で$\psi, \partial\psi/\partial n$を Taylor 展開する。そして磁束が至るところで一様な場を仮定し、滑らかな境界に対してこれらを適用、かつ、プラズマ境界上で磁束が一定の条件を用いれば、考えている Hyper-Singular 境界積分方程式は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{\partial \psi_i(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial m}\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial n} d\Gamma \\ &= \sum_{l,m}\alpha_{l,m}\left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi_i^{(l,m)}(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial m}\frac{\partial \varphi^{(l,m)}(\boldsymbol{x})}{\partial n} - \frac{\varphi^{(l,m)}(\boldsymbol{x}) - \varphi_i^{(l,m)}(\xi)}{r}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} \right) d\Gamma \right\} \end{aligned} \qquad (2)$$

と整理される。式(2)では”hyper singularity”が解析的に取り除かれている。任意の単位方向ベクトルmを点iにおける境界の法線方向と定めれば、従来の境界積分方程式と同様の手順で離散化を進めることができる。

実際の数値計算

式(2)に対して実際に数値計算を行い、一定の精度を得られたことからその有用性が実証された。今後は、離散化の精度の点で一定要素よりも優れている非適合 2 次要素を用いて数値計算を行い、解の精度を向上させるとともに、トカマク電流密度分布の逆解析に従来の境界積分方程式と連立させてロバストな解を得ることが課題となる。