Grad-Shafranov方程式に対する Hyper-Singular境界積分方程式の定式化

Hyper-singular BIE formulation for the Grad-Shafranov equation

北海道大学大学院工学研究科
〇下田 啓詞
板垣 正文

研究背景

- トカマクプラズマ電流密度分布の逆解析
  - 外部磁気センサー信号から電流密度分布を求める数値計算
  - 電流密度分布の形状によっては十分な精度を得られない
- Hyper-Singular 境界積分方程式(HBIE)
  - 通常の境界積分方程式(SBIE)を特異点位置で再度微分
  - SBIEと連立させることで逆解析のロバスト性を高め得る
  - 超特異性(hyper singularity)の除去に工夫を凝らす必要がある

特異性

数値計算が困難

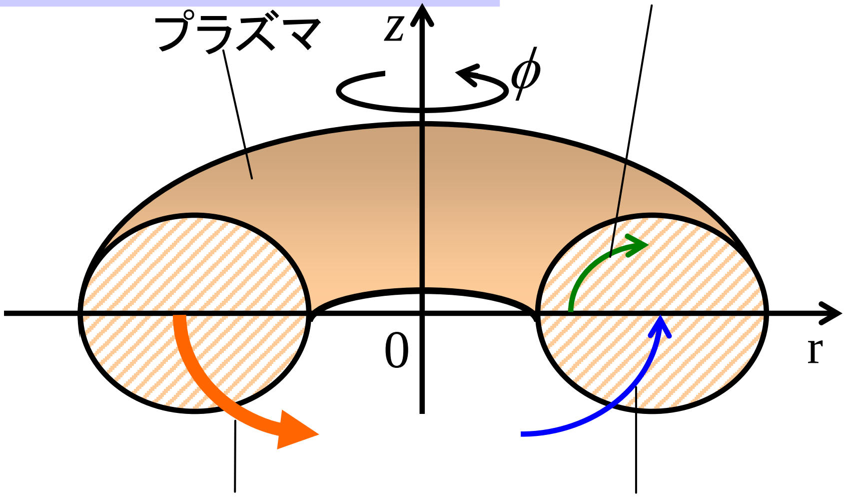
- weak singularity (弱い特異性) $\int_0^r \log x \mathrm{d}x$
- strong singularity (強い特異性) $\int_{-r}^r \frac{1}{x} \mathrm{d}x$
- hyper singularity (超特異性) $\int_{-r}^r \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$

超特異性を持つHBIE

特異性のレベルを減ずる

弱い特異性を持つHBIE

HBIEの定式化①



トカマク型核融合装置の概要

Grad-Shafranov方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=-\mu_0 r j_\phi$$

Grad-Shafranov方程式と等価なSBIE

$$\psi(\xi)-\int_\Gamma\left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial n}-\frac{\psi(\mathbf{x})}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)d\Gamma=$$

$$\sum_{l,m}\alpha_{l,m}\left\{\varphi^{(l,m)}(\xi)-\int_\Gamma\left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{\partial n}-\frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{r}\frac{\partial\psi^*}{\partial n}\right)d\Gamma\right\}$$

特異点位置において再度微分

r,ϕ,z	座標
j_φ	電流密度
ψ,ψ^*	磁束、基本解
$\varphi^{(l,m)}$	特解
$\alpha_{l,m}$	多項式展開係数
μ_0	真空透磁率

HBIEの定式化②

超特異性をもつHBIE

超特異性

$$\frac{\partial\psi(\xi)}{\partial m}-\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial m}\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial n}-\boxed{\frac{\psi(\mathbf{x})}{r}\frac{\partial^{2}\psi^{*}}{\partial m\partial n}}\right)d\Gamma$$

$$=\sum_{l,m}\alpha_{l,m}\left\{\frac{\partial\varphi^{(l,m)}(\xi)}{\partial m}-\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi^{*}}{\partial m}\frac{\partial\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{\partial n}-\boxed{\frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{r}\frac{\partial^{2}\psi^{*}}{\partial m\partial n}}\right)d\Gamma\right\}$$

$$\frac{\partial\psi^{*}}{\partial m\partial n}=C_0+\boxed{C_1(\log\varepsilon)}+\boxed{\frac{C_2}{\varepsilon}}+\boxed{\frac{C_3}{\varepsilon^{2}}}$$

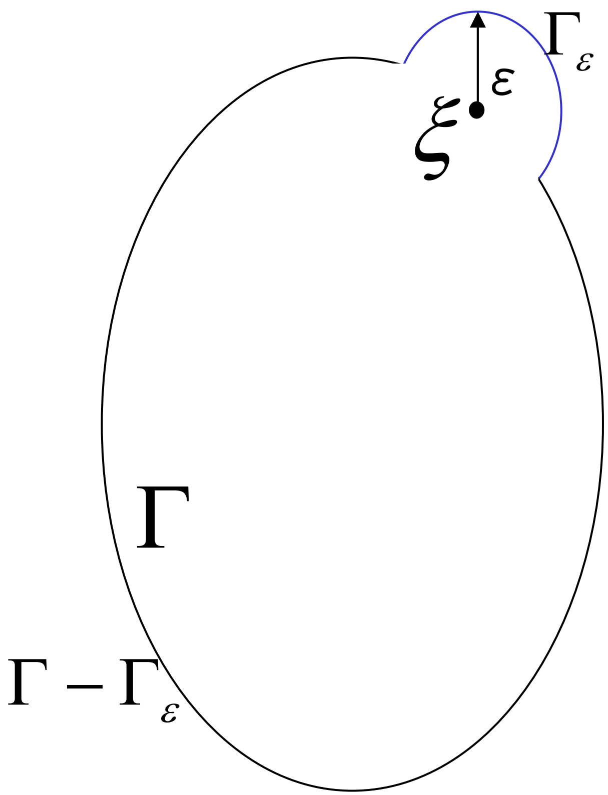
弱い特異性

強い特異性

超特異性

$\frac{C_2}{\varepsilon}$ ， $\frac{C_3}{\varepsilon^2}$ の項を消去する必要がある

HBIEの定式化③



- 特異点の有無によって境界を二つに分ける

  Γ_ε: 特異点を中心とした半径εの拡張領域

- ε →0の極限をとることで、もとの式と等価とする

$$\int_{\Gamma} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}$$

HBIEの定式化④

ξ の近傍で $\psi, \dfrac{\partial \psi}{\partial n}$ をTaylor展開

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi(\xi) + \varepsilon \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial n} + \cancel{\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial n^2}} + \cdots$$

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} = \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi(\xi)}{\partial n^2} + \cancel{\frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^3 \psi(\xi)}{\partial n^3}} + \cdots$$

積分内では特異性をもつ
基本解の微分値がかかっている

$$\mathrm{d}\Gamma = \varepsilon \mathrm{d}\theta$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial m} \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial m} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial m} \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial m} d\Gamma \\ &\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\psi(\mathbf{x})}{r} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\psi(\xi)}{r} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varepsilon}{r} \frac{\partial \psi(\xi)}{\partial n} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma \end{aligned} \right.$$

HBIEの定式化⑤

磁束が至るところで一様な場を仮定

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma = -\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} d\Gamma$$

Γ_ε を $\Gamma-\Gamma_\varepsilon$ の積分で表すことができる

- 境界が滑らかである
- 境界上で磁束が一定

これらの条件を用いる

弱い特異性のみをもつHBIE

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial m}\frac{\partial \psi(\boldsymbol{x})}{\partial n} d\Gamma$$

$$= \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi_i^{(l,m)}(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial m}\frac{\partial \varphi^{(l,m)}(\boldsymbol{x})}{\partial n} - \boxed{\frac{\varphi^{(l,m)}(\boldsymbol{x}) - \varphi_i^{(l,m)}(\xi)}{r}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n}} \right) d\Gamma \right\}$$

有限確定

境界積分の有限確定性

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})-\varphi^{(l,m)}(\xi)}{r}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial m\partial n}\right\}$$ について検証

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})-\varphi^{(l,m)}(\xi)}{\varepsilon}\right\}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\varepsilon}{r}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial m\partial n}\right\}$$

$\frac{\partial\varphi^{(l,m)}}{\partial\Gamma}$ であり、$\varphi^{(l,m)}$ を多項式展開しているので有限確定

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\left\{\frac{\varepsilon}{r}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial m\partial n}\right\}d\Gamma=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\left\{\boxed{C_0}+\boxed{\frac{C_1}{\varepsilon}}\right\}|J|ds$$

境界の離散化

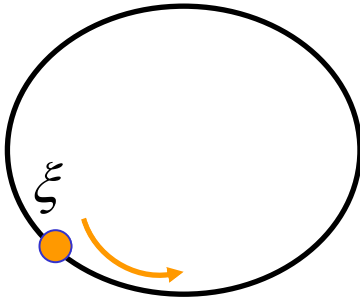
- 一定要素、線形要素 → (有限確定項)+0
- 二次要素 → (有限確定項) +(一定値に有限確定)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})-\varphi^{(l,m)}(\xi)}{r}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial m\partial n}\right\}$$ は有限確定である（他の項についても同様）

計算方法

- HBIEを用いた境界要素法

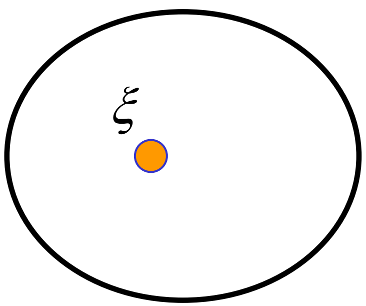
1. ξ を境界上にn個配置し、n個の HBIE より $\left.\dfrac{\partial \psi}{\partial n}\right|_{\Gamma}$ を導出



$$\frac{1}{2}\frac{\partial \psi(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial m}\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n}\, d\Gamma$$

$$= \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi^{(l,m)}(\xi)}{\partial m} - \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial m}\frac{\partial \varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x}) - \varphi^{(l,m)}(\xi)}{r}\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial m \partial n} \right) d\Gamma \right\}$$

2. ξ を境界内部に置き、SBIEを用いて $\psi(\xi)$ を導出

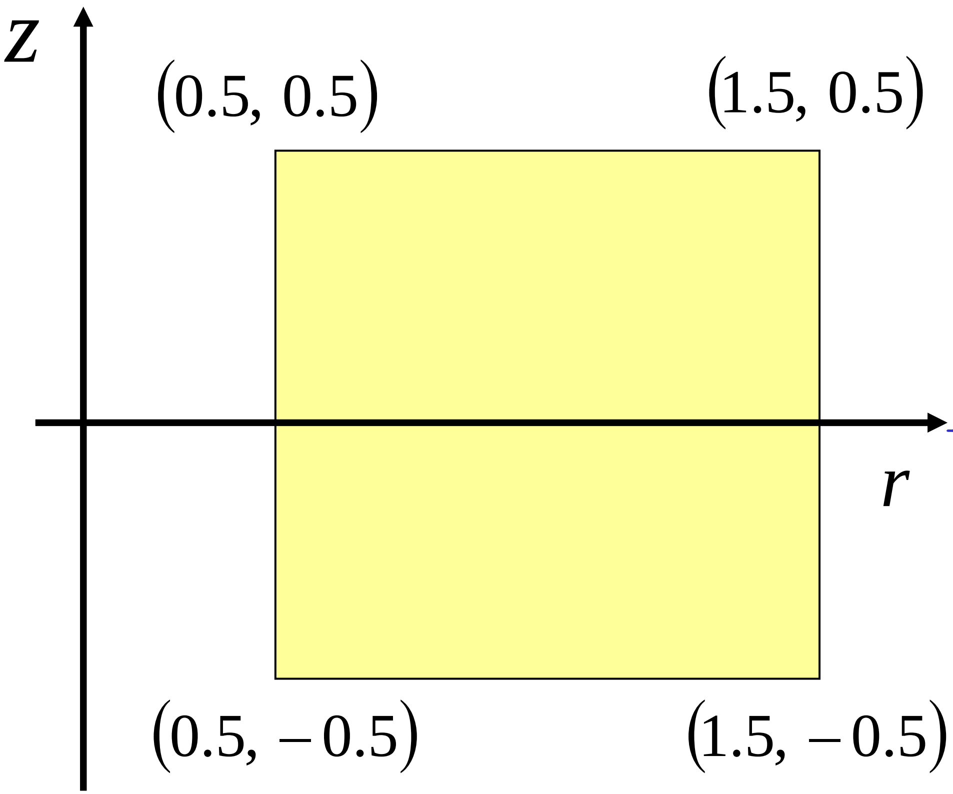


$$\boxed{\psi(\xi)} - \int_{\Gamma} \left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\psi(\mathbf{x})}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma =$$

$$\sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ \varphi^{(l,m)}(\xi) - \int_{\Gamma} \left(\frac{\psi^*}{r}\frac{\partial \varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\varphi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{r}\frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right\}$$

数値計算例

- 矩形プラズマにおける解析解との比較
  - HBIEの精度検証の段階のため、逆解析は行っていない



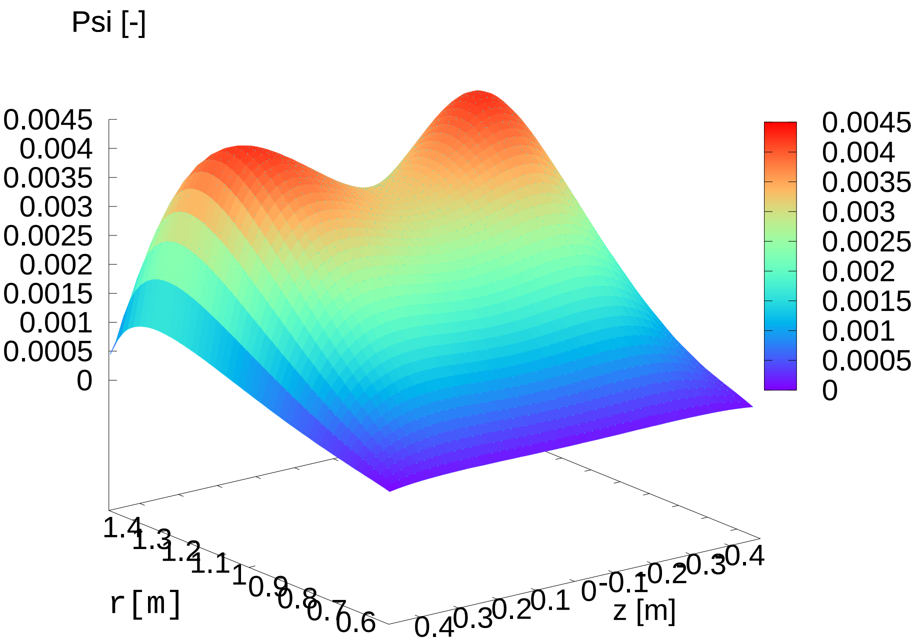
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \right)\psi = r^3 z^2 \\ \psi\big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

境界上の $\dfrac{\partial \psi}{\partial n}$ 、及び内部磁束分布を求める

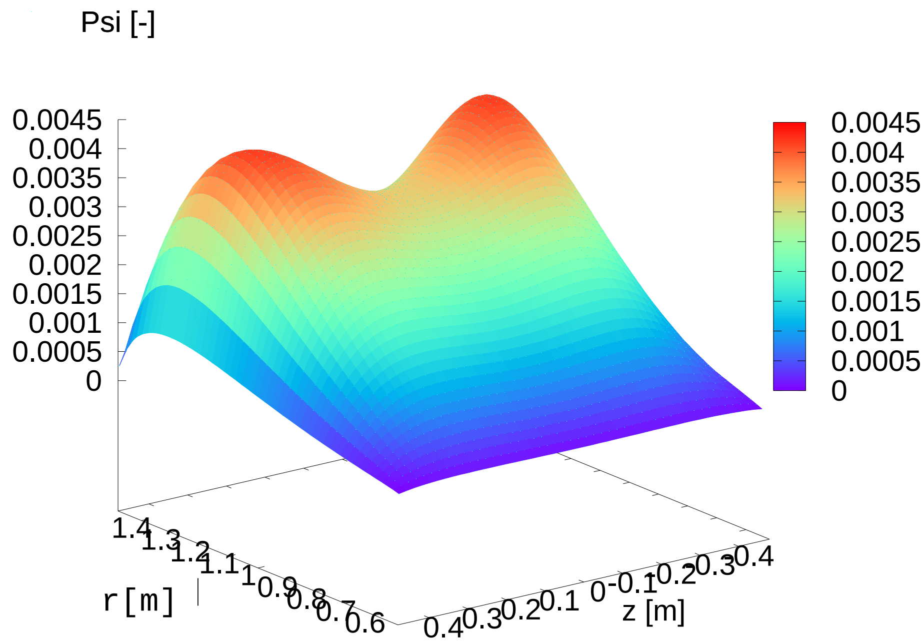
磁束分布

- 一定要素で離散化
- 要素数80

解析解



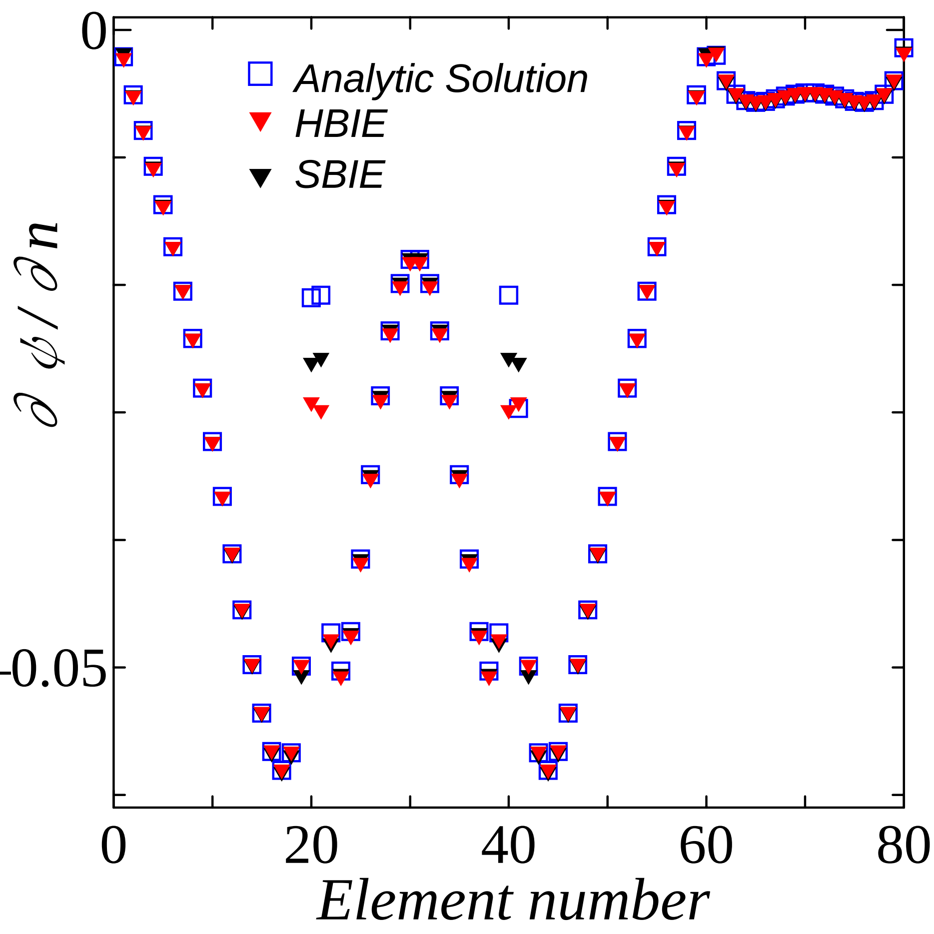
BEM with HBIE

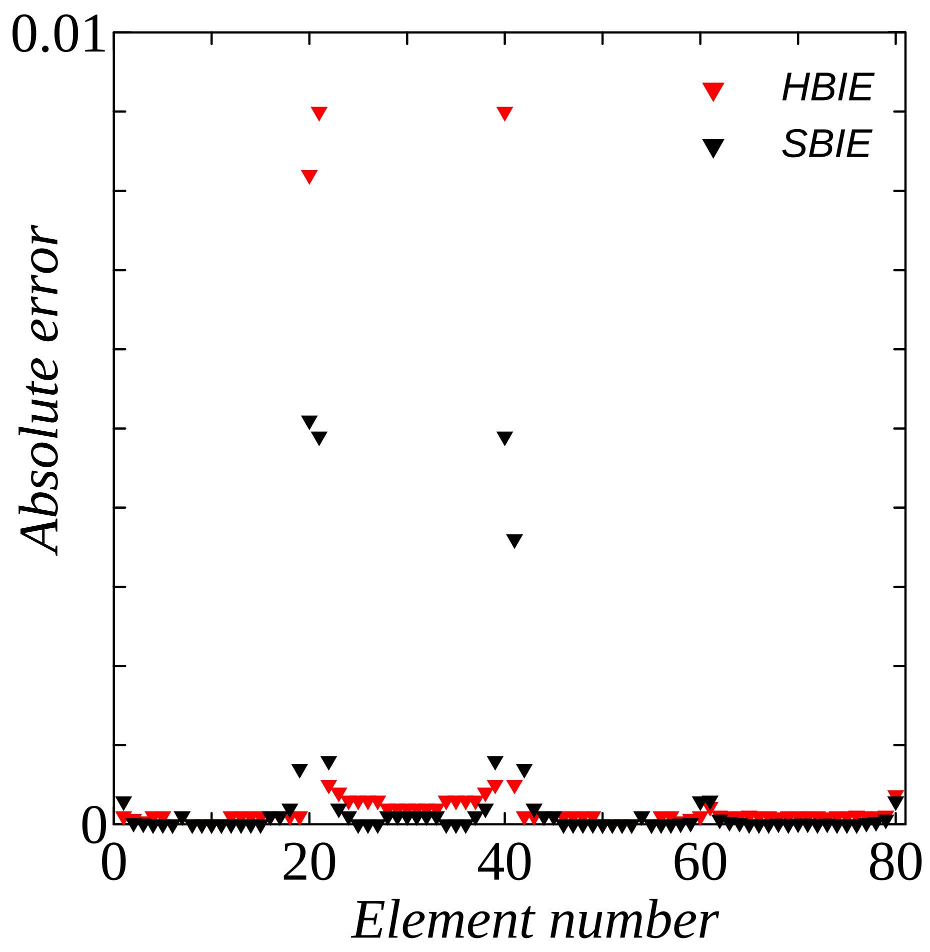


解析解にほぼ等しい磁束分布を再現

$\left.\frac{\partial \psi}{\partial n}\right|_{\Gamma}$ の比較

- 一定要素で離散化
- 要素数80





まとめ

結果

1. Grad-Shafranov 方程式に対するHyper-Singular境界積分方程式の定式化に成功した
2. 実際に数値計算を行い、一定の精度を得られたことからその有用性が実証された

今後の課題

1. 離散化の精度に優れた非適合2次要素を用いて数値計算を行い、解の精度を向上させる
2. 逆解析において、SBIEと連立させてロバストな解を得る

Hölder連続

- 通常連続より強く、Lipschitz連続、微分可能より弱い

$$
\left|x_1 - x_0\right| < \varepsilon^{\exists},
$$

$$
\left|f(x_1) - f(x_0)\right| < A\left|x_1 - x_0\right|^{\alpha}
$$

GS方程式のHBIE

- HBIE

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Psi_i(\xi)}{\partial m} - \lim_{\epsilon \to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi^*}{\partial m}\frac{\partial \Psi_i(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma$$

$$= \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial \phi_i^{(l,m)}(\xi)}{\partial m} - \lim_{\epsilon \to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi^*}{\partial m}\frac{\partial \phi^{(l,m)}(\mathbf{x})}{\partial n} - \frac{\phi^{(l,m)}(\mathbf{x}) - \phi_i^{(l,m)}(\xi)}{r}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial m \partial n} \right) d\Gamma \right\}$$

既存のプログラムを利用して、

変更箇所のみを取り替える

$$\frac{1}{2}\Psi_i(\xi) - \int_{\Gamma'} \left(\frac{\Psi^*}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \frac{\Psi}{r}\frac{\partial \Psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma'$$

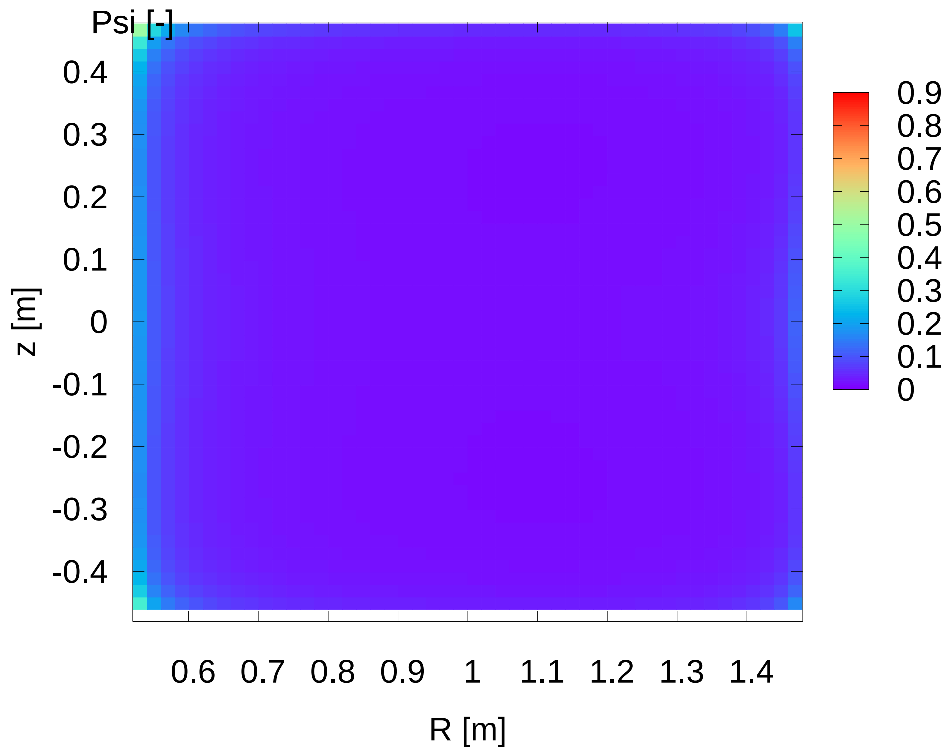
$$= \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left\{ \phi_i^{(l,m)} - \int_{\Gamma'} \left(\frac{\Psi^*}{r}\frac{\partial \phi^{(l,m)}}{\partial n} - \frac{\phi^{(l,m)}}{r}\frac{\partial \Psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma' \right\}$$

磁束分布の比較

•一定要素で離散化
•要素数80

$$\frac{\left|\psi_{Analytic} - \psi_{HBIE}\right|}{\left|\psi_{Analytic}\right|}$$

- SBIE



誤差はほとんどなく、良い精度で内部磁束を再現している

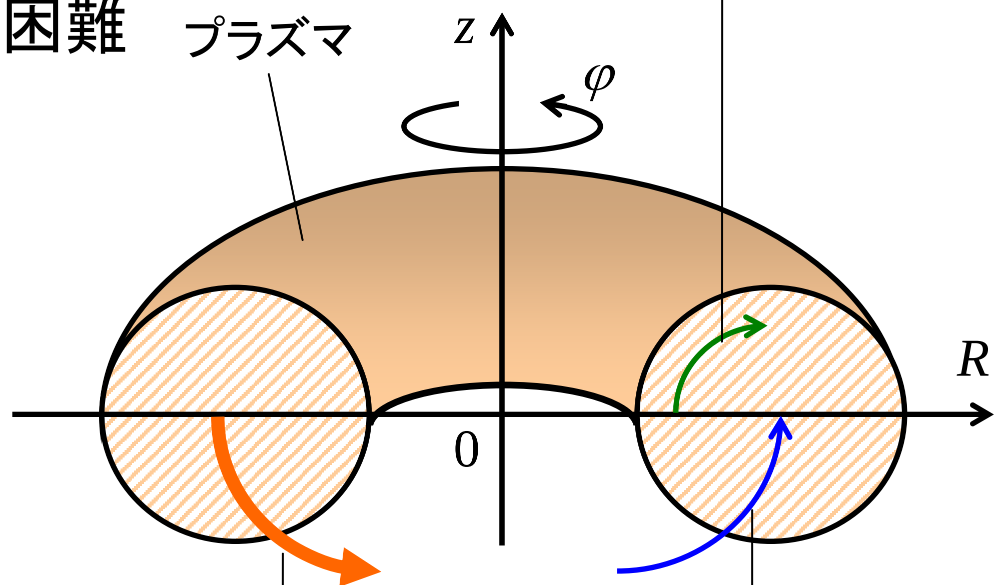
研究背景

- プラズマ内部の電流密度分布
  - プラズマの閉じ込め特性を左右
  - プラズマ内部の情報を
    直接知ることは困難

外部磁気センサー

↓ *逆解析*

プラズマ内部の電流密度分布



トカマク型核融合装置の概要